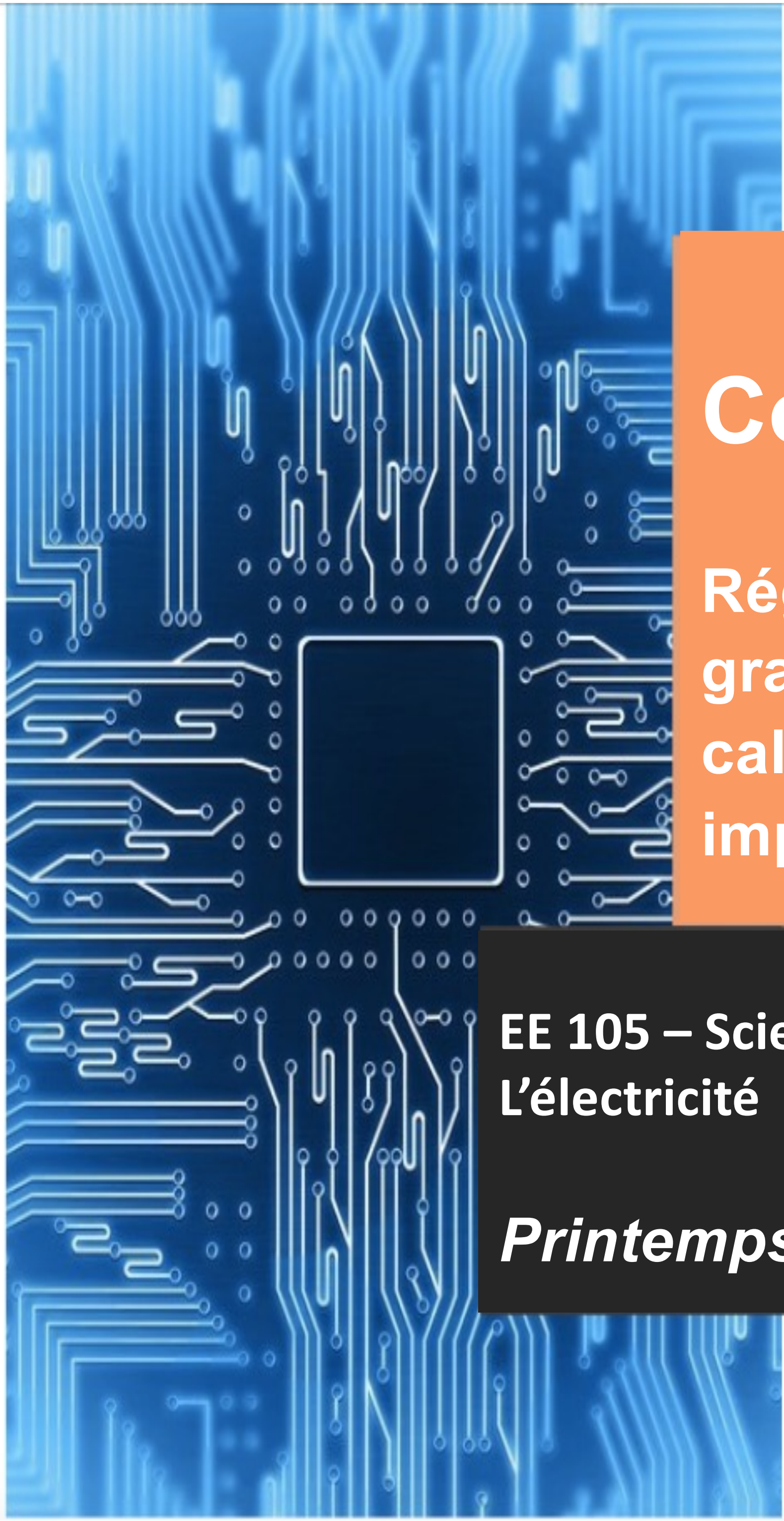
EPFL



Cours 8

Régime permanent sinusoïdal, grandeurs sinusoïdales, calcul complexe associé, impédances et admittances

EE 105 – Sciences et Technologie de L'électricité

Printemps 2025

Prof. Sandro Carrara - sandro.carrara@epfl.ch

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

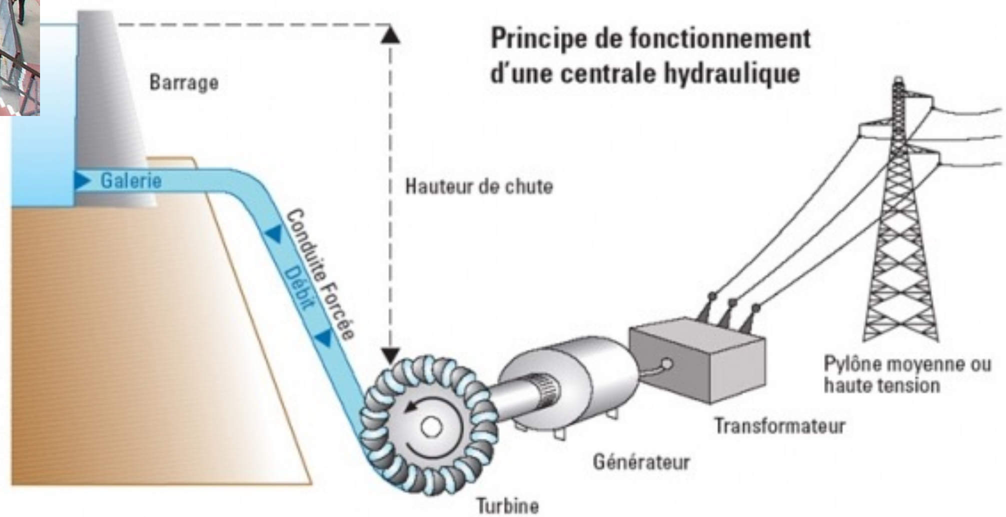
Description .

- Aujourd'hui
  - Régime permanent sinusoïdal
  - Grandeurs sinusoïdales
  - Calcul complexe associé
  - Impédances et admittances
  - Sections 6.1 - 6.6 et 7.1
- Semaine prochaine
  - loi d'Ohm
  - loi de Kirchhoff
  - Diviseur de tension et de courant
  - Superposition
  - Sections 7.2-7.4

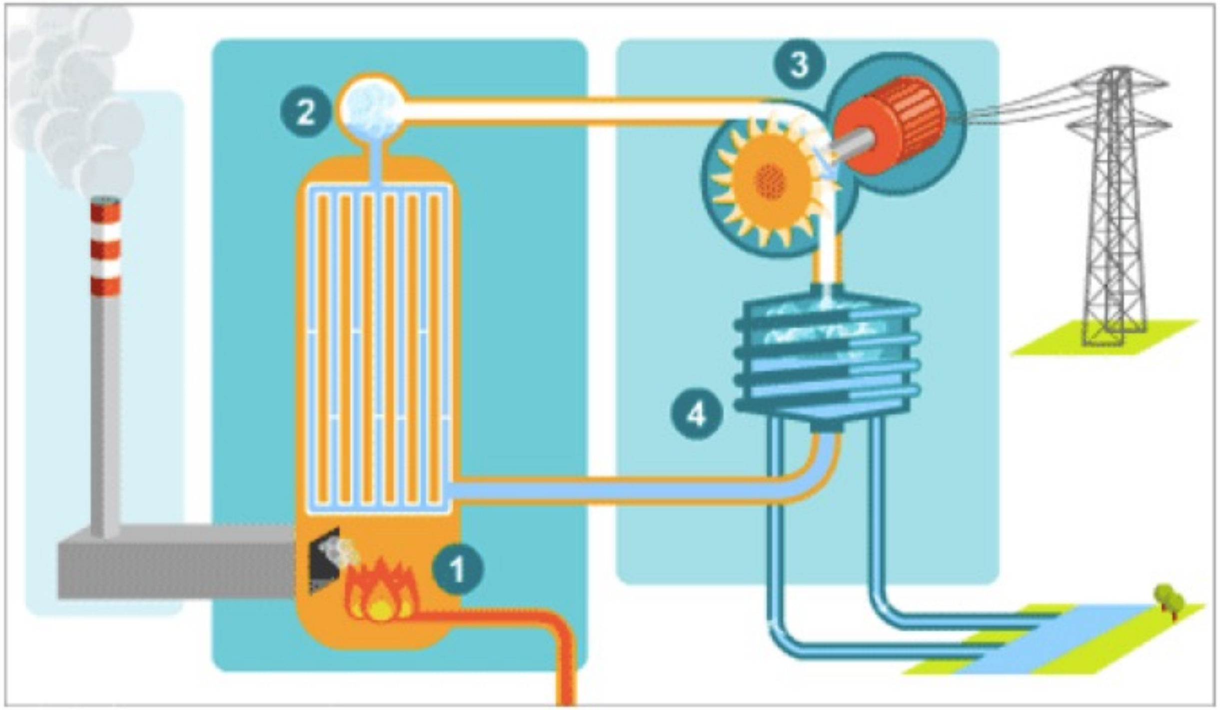
A lire

L’origine de l’électricité industrielle

Hydroélectrique

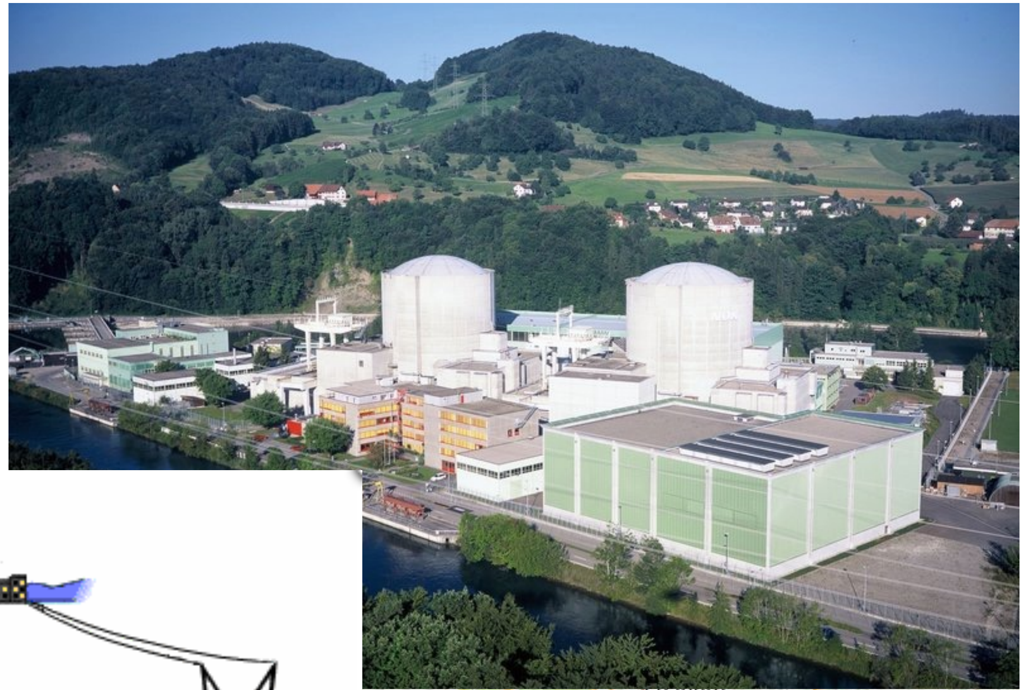


L’origine de l’électricité industrielle

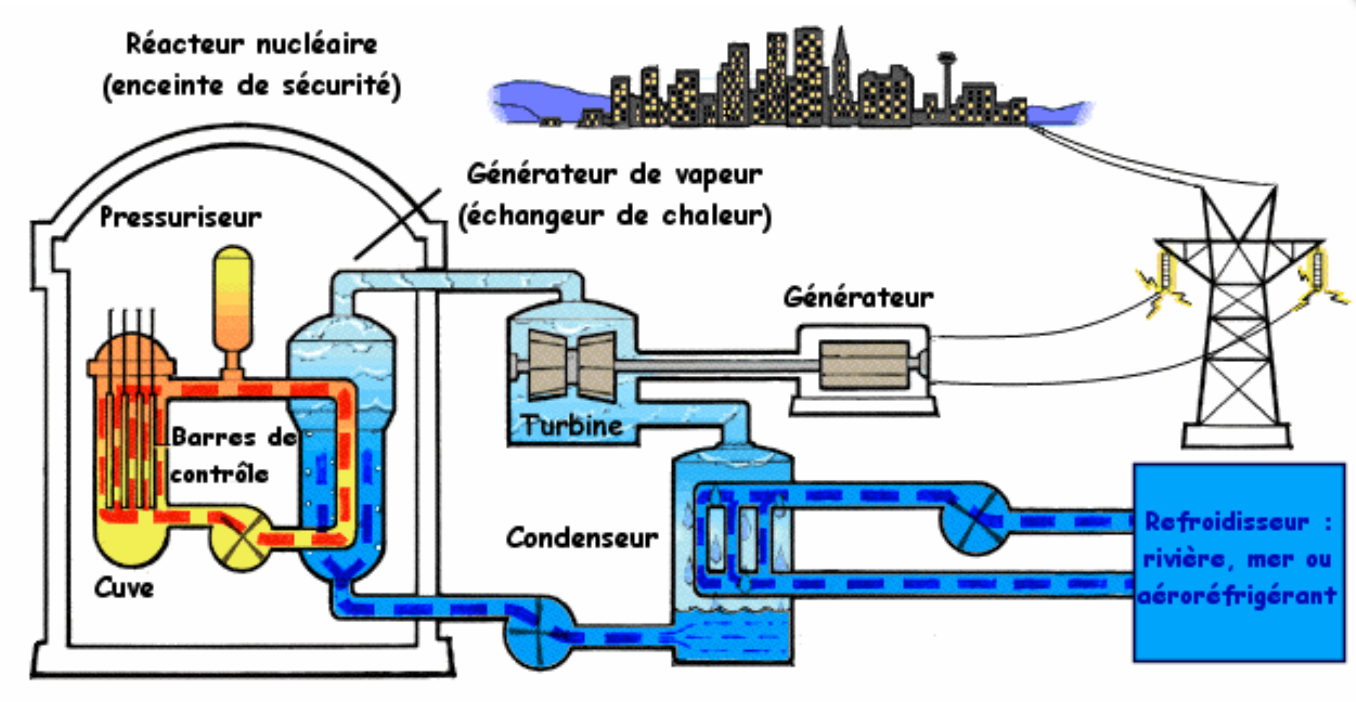


Au charbon

L’origine de l’électricité industrielle

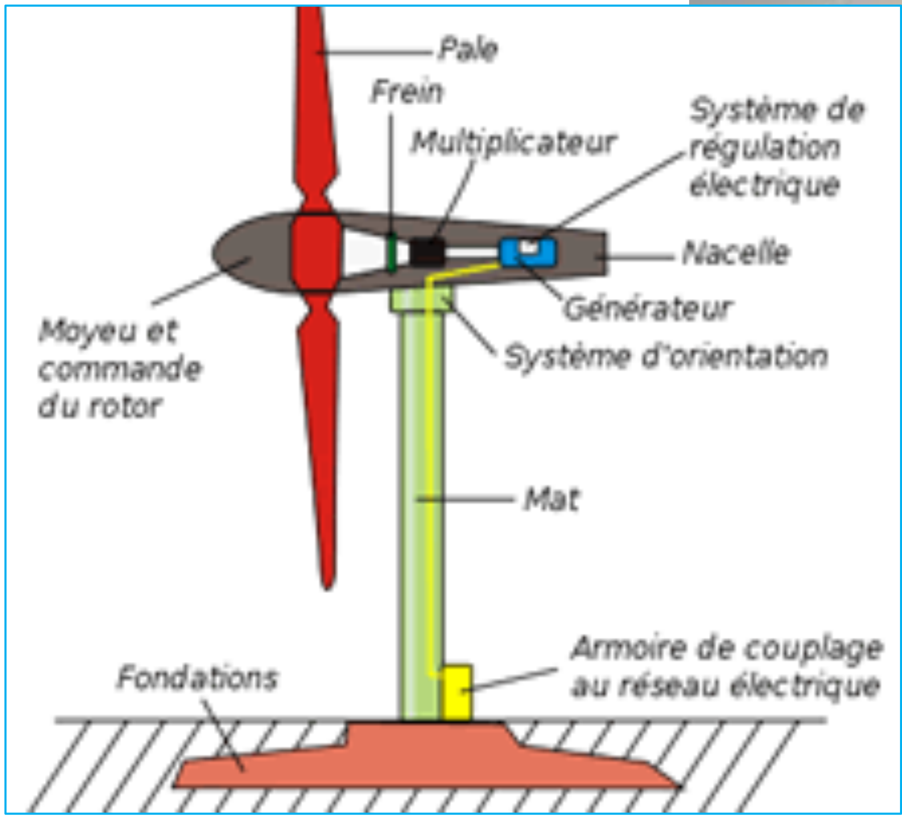


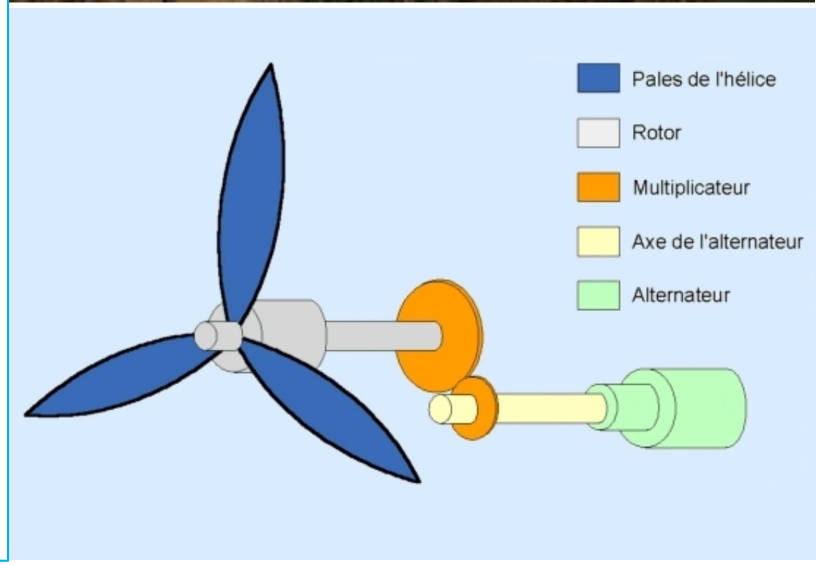
Nucléaire @ Oldbury



L’origine de l’électricité industrielle

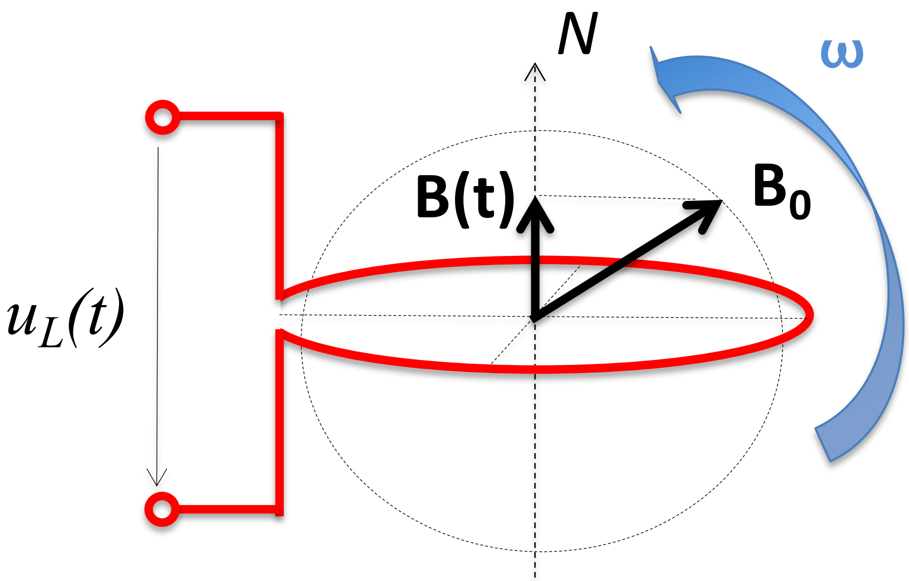
Eolienne





L'électricité par la Loi de Lenz

Un aimant dans un bobinage



Rappel de la loi de Lenz

$$u(t) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A_L B(t)\right)$$

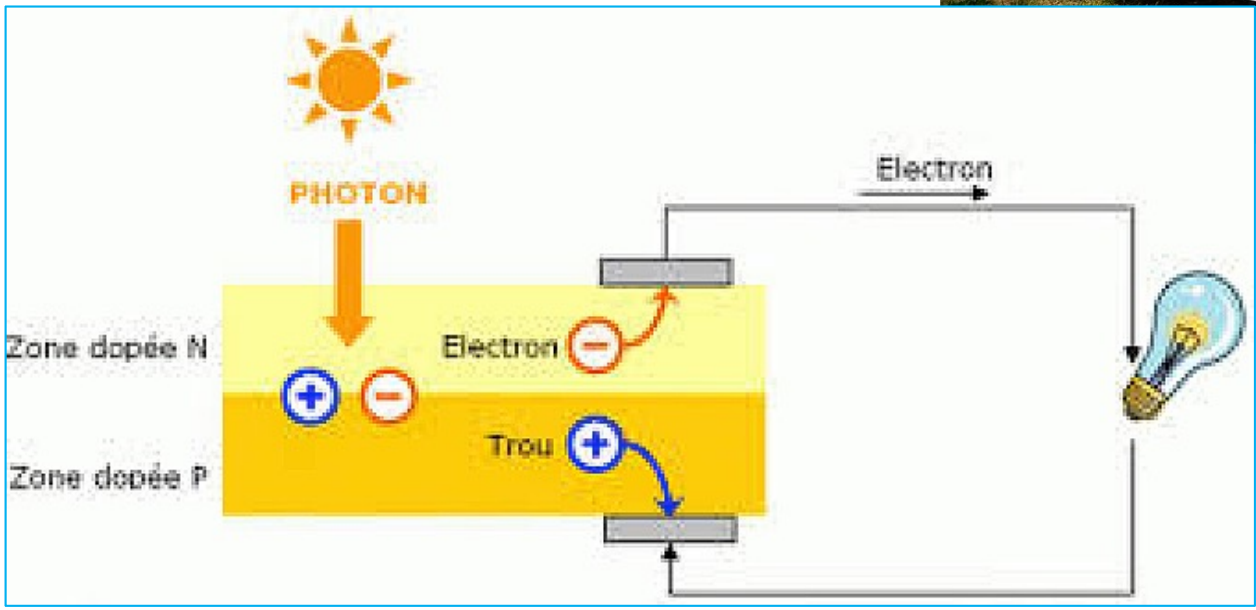
Et on l'applique à la rotation d'un champ magnétique placé dans un bobinage

$$u_L(t) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A_L B_0 sin\left(\omega t\right)\right] = \omega A_L B_0 \cos(\omega t)$$

En principe, une tension alternative

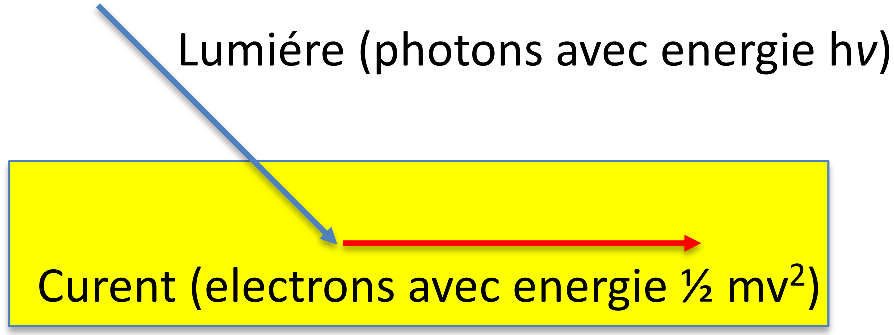
L’origine de l’électricité industrielle

Photo Voltaïque



L'électricité par l'effet Photoélectrique

La lumière sur un métaux



Rappel de la loi déduit par Einstein

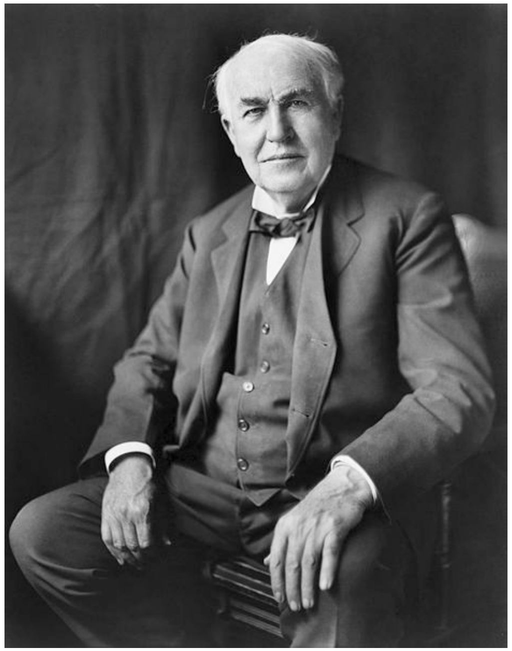
$$h\nu = h\nu_0 + \frac{1}{2}mv^2$$

L'émission d'électrons d'un métal due à un rayonnement électromagnétique (par exemple, la lumière ultraviolette)

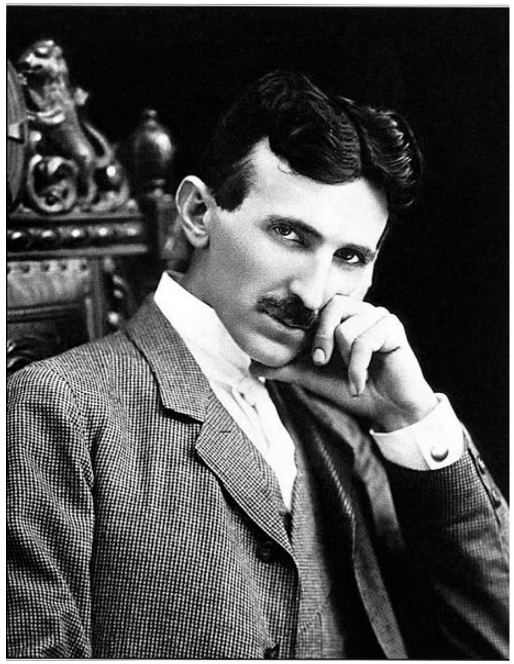
En principe, un courant en continue

La guerre des courants

- La guerre des courants (parfois appelée bataille des courants) est une controverse technique et industrielle qui s'est déroulée aux États-Unis, à la fin des années 1880



Thomas A. Edison (1847-1931)



Nikola Tesla (1856-1943)

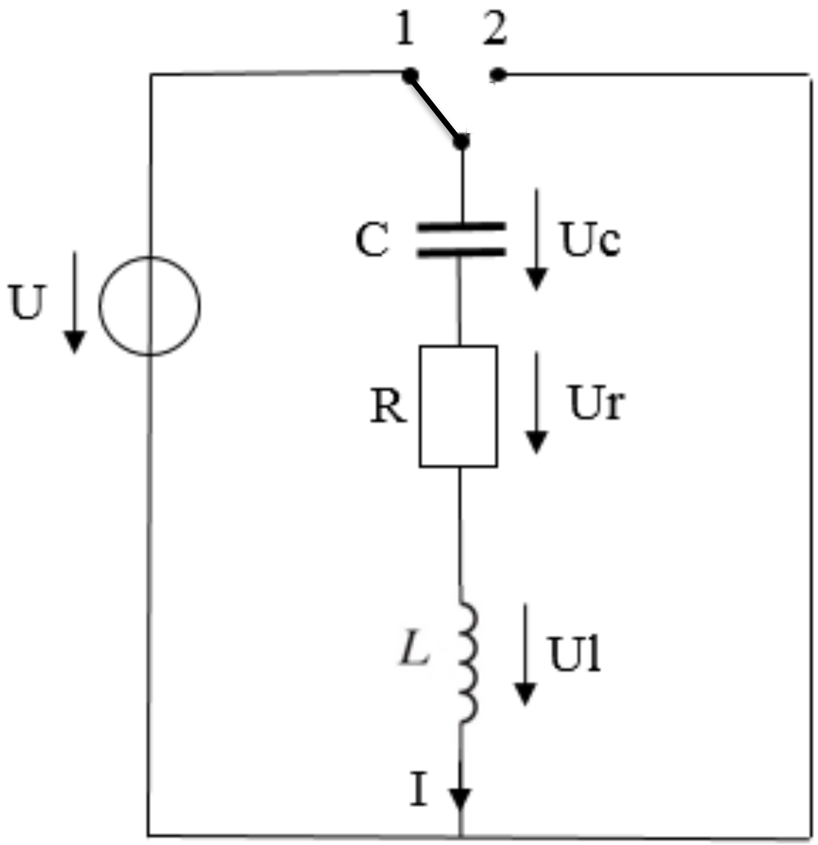
L’origine:

- La fonction sinusoïdale joue, donc, un rôle fondamental parce qu’il résulte typiquement de l’énergie mécanique avec la rotation d’un bobinage placé dans un champ magnétique (ou vice-versa)

- À la fin du 1887, lorsque Tesla présenta ses systèmes de transformateurs, moteurs, câbles et luminaires utilisant le courant alternatif, il devint clair que le courant alternatif représentait l’avenir de la génération, du transport et d’utilisation de l’énergie électrique.

À la Math: Le circuit RLC série

Loi de Kirchhoff aux mailles $U = U_C + RI + L\frac{dI}{dt}$

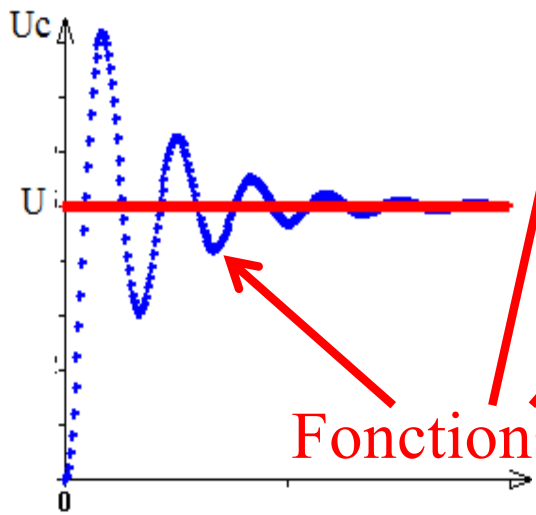


donne l'équation

$$U = U_C + RC\frac{dU_c}{dt} + L\frac{d}{dt}\left(C\frac{dU_c}{dt}\right)$$

Avec la solution de la forme

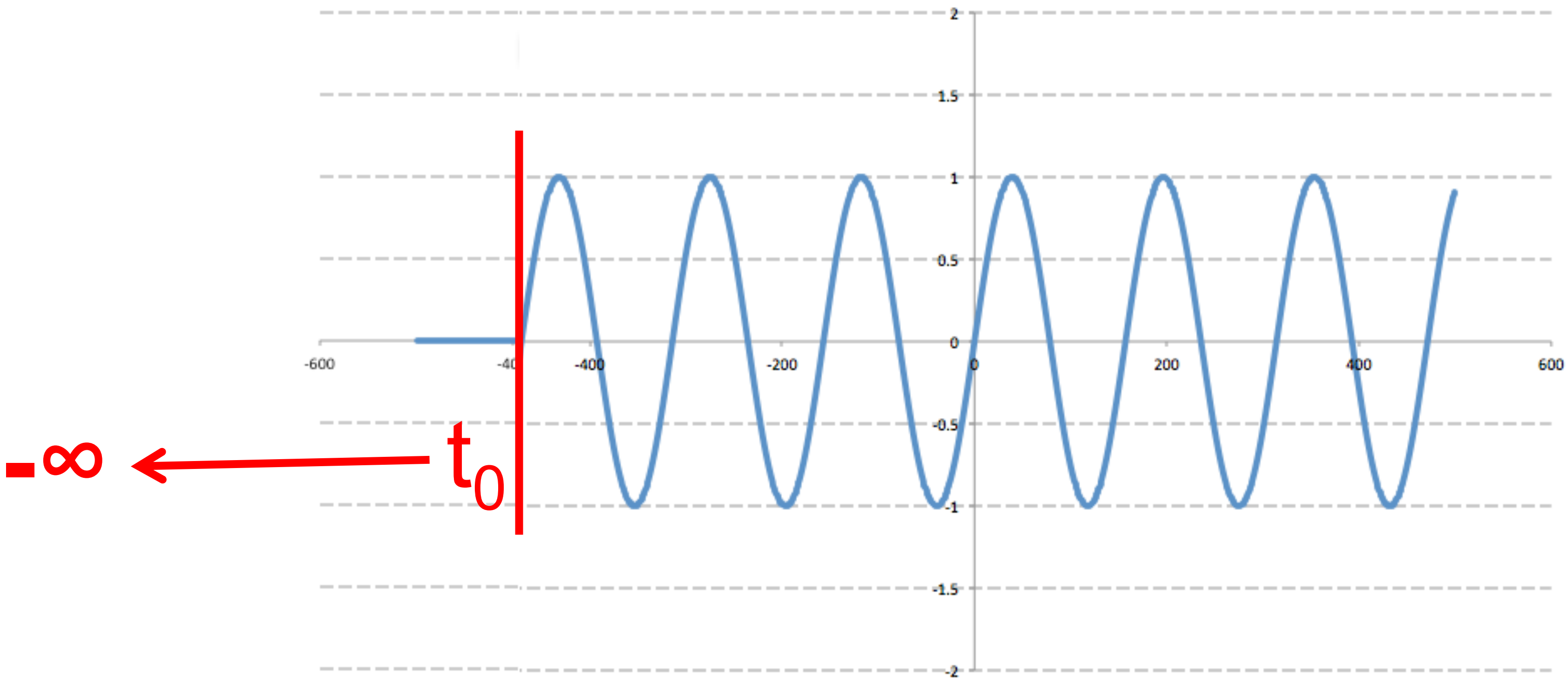
$$U_c(t) = U + e^{-\lambda t}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$$



Fonctions sinusoïdales

Définition:

- Un circuit électrique est dit ***en régime permanent sinusoïdal*** lorsque les excitations extérieures sont des fonctions sinusoïdales

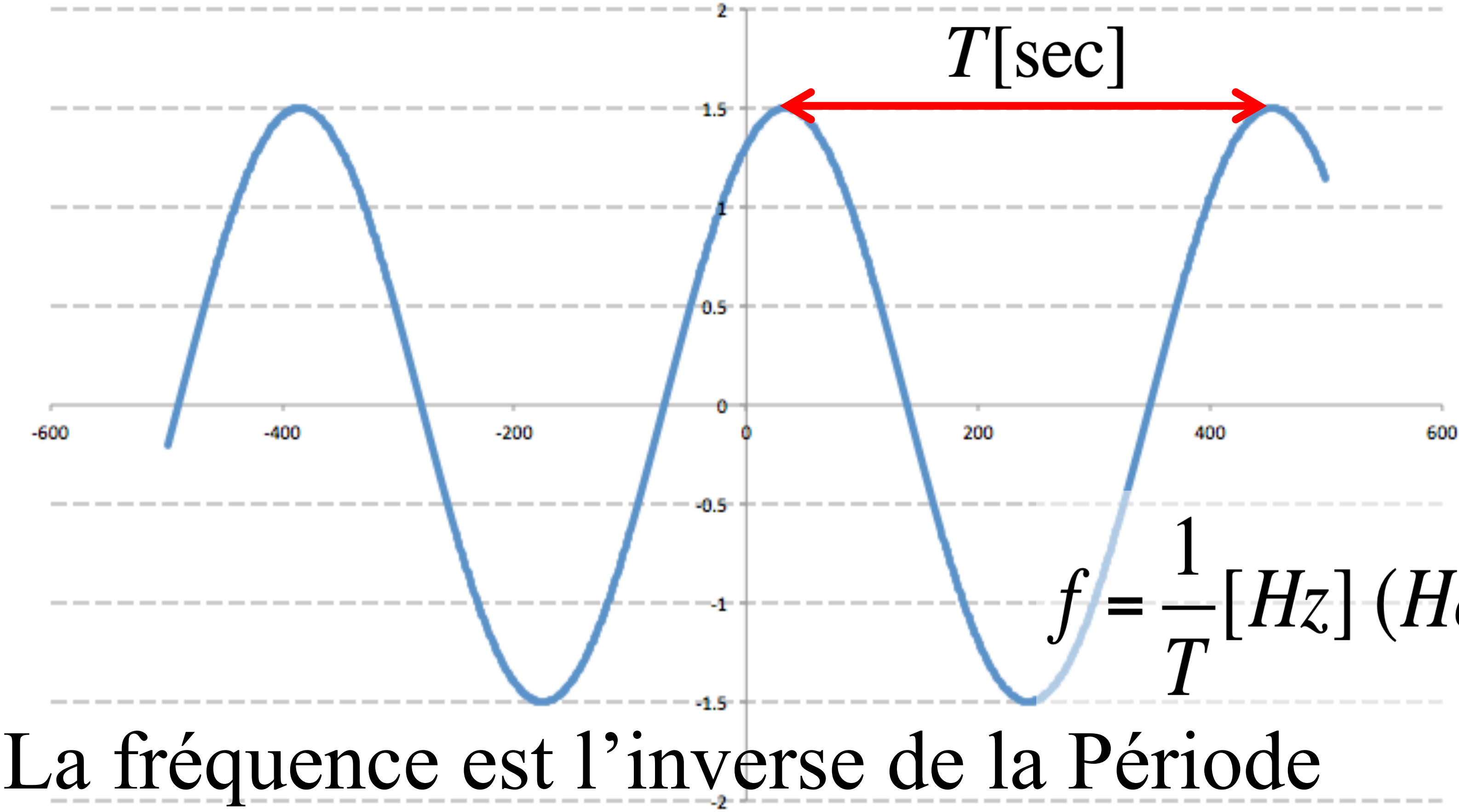


Commentaires

- Le régime sinusoïdal **permanent** est un régime **limite**
- Il est possible lorsque tous les phénomènes **transitoires** se sont **évanouis**
- Le régime sinusoïdal permet une étude simplifiée car il est caractérisé par des **opérations algébriques** en remplaçant les relations intégro-différentielles

Définition:

- La Période est l'intervalle de temps après laquelle la fonction se répète de façon égale

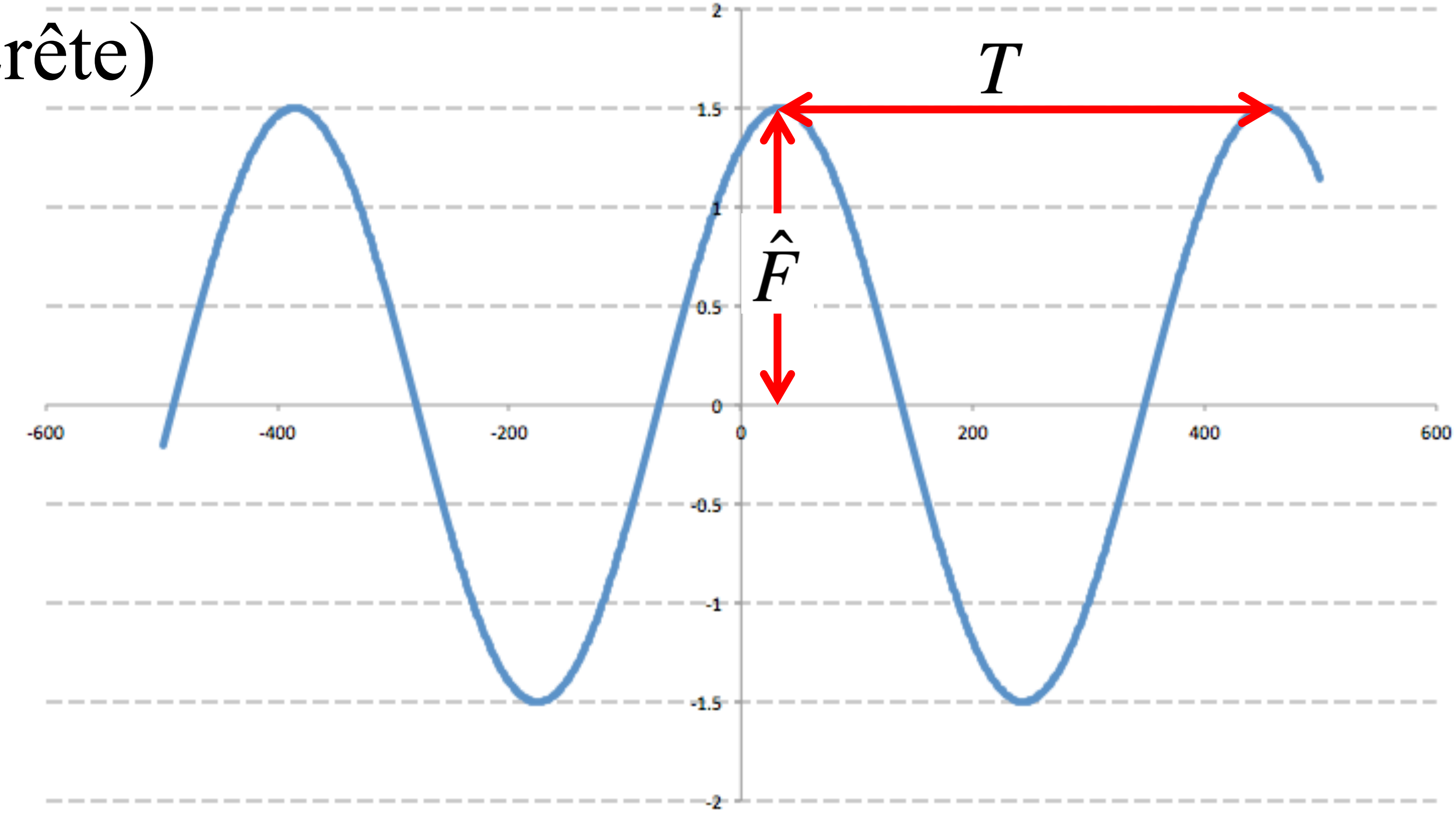


$$f = \frac{1}{T}[Hz]\ (Hertz)$$

- La fréquence est l'inverse de la Période

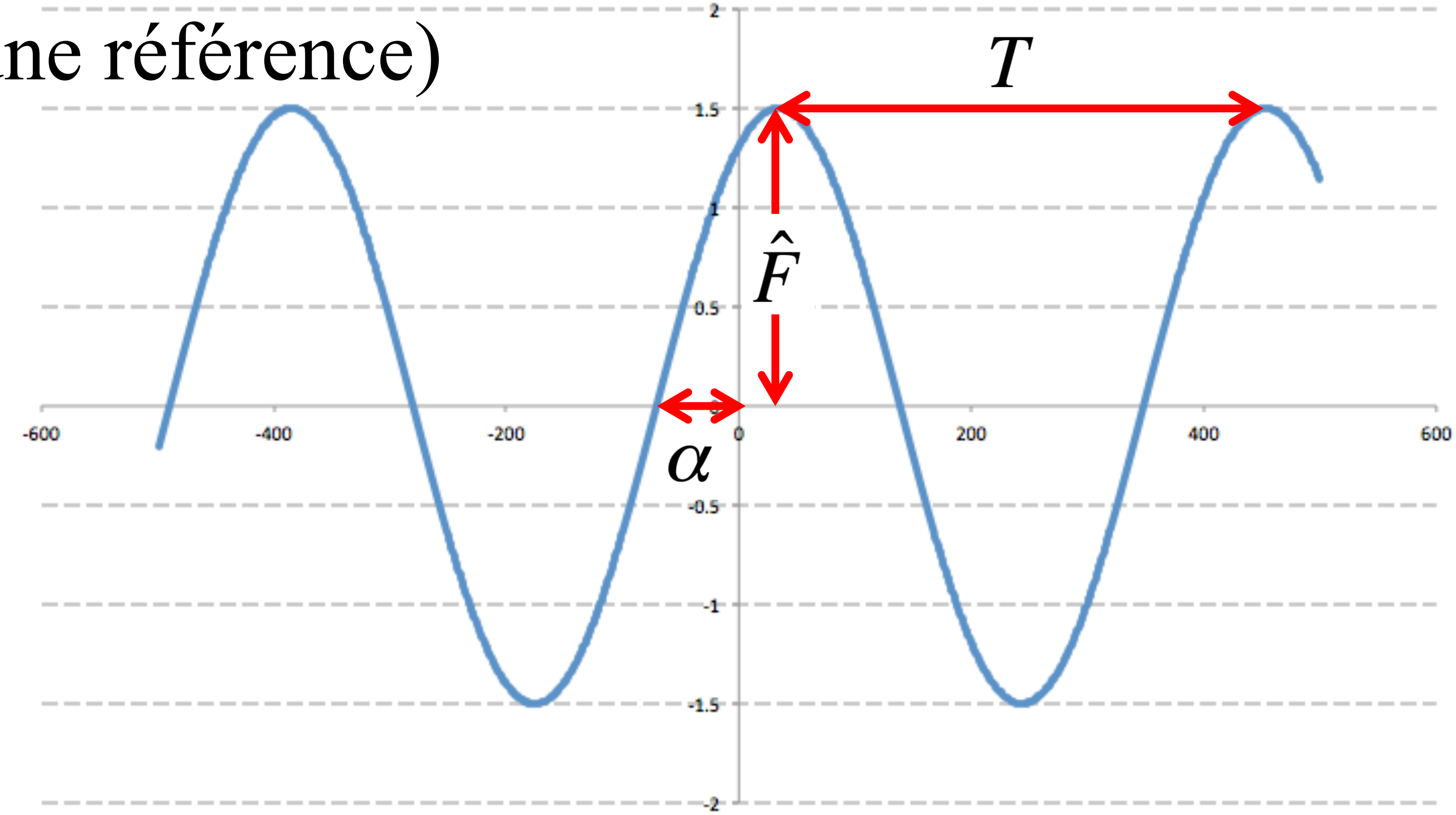
Définition:

- L'Amplitude est la plus grande valeur de la fonction dans une période (dite aussi valeur de crête)



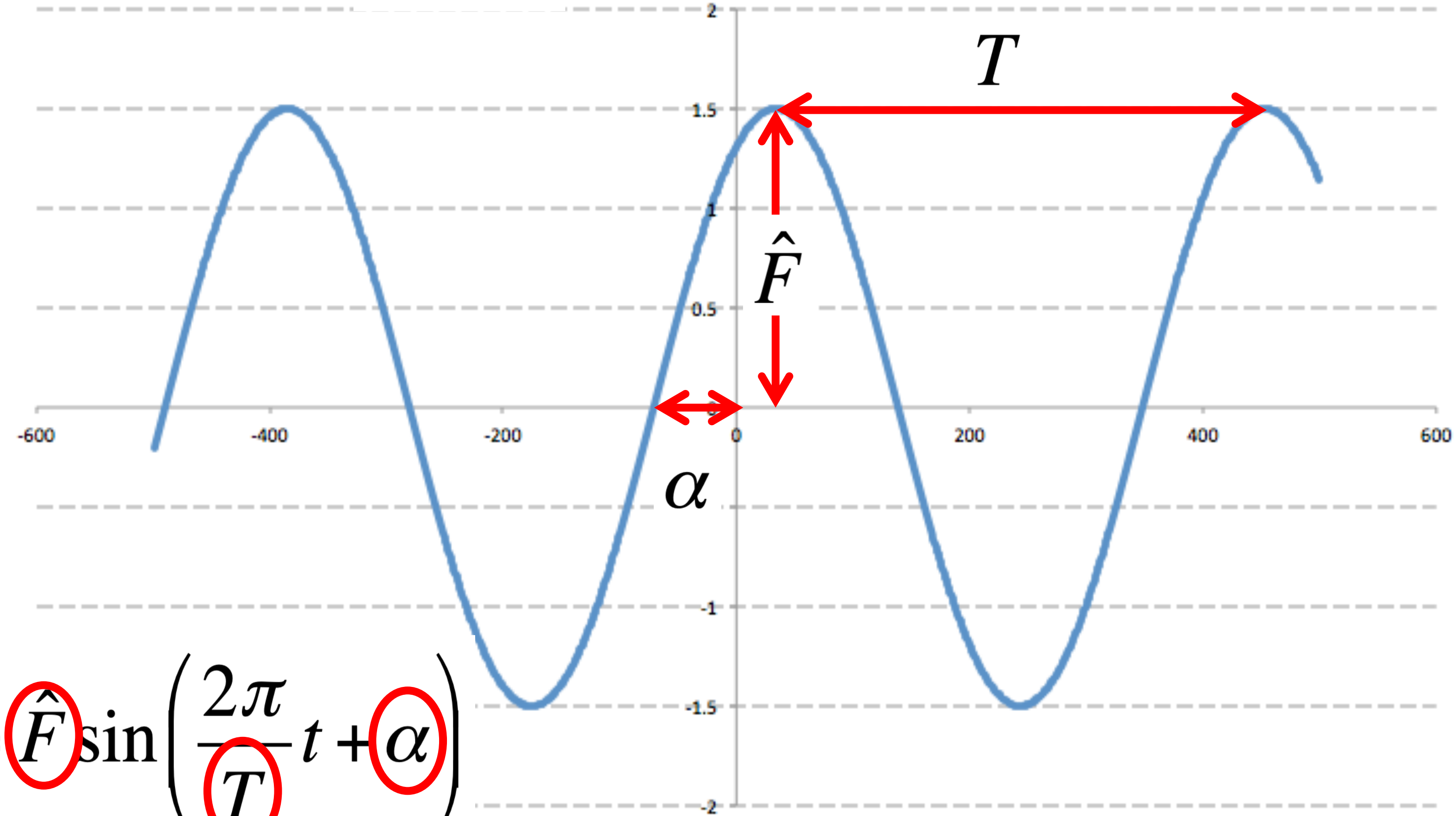
Définition:

- La phase est le retard (ou l'avance) que la fonction a par rapport à d'autres signaux (ou à une référence)



Définition:

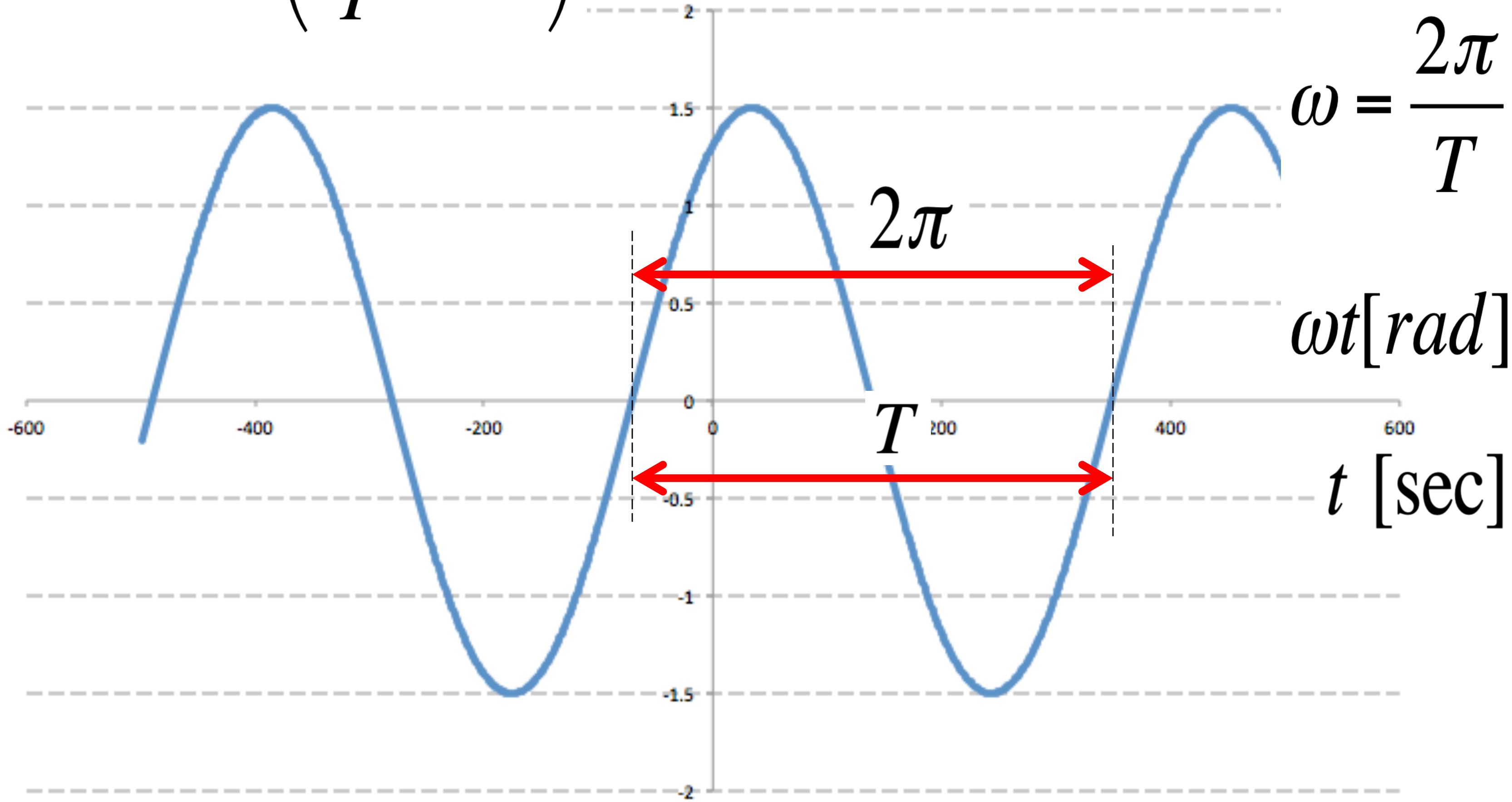
- Donc, la fonction est définie par les trois paramètres $\hat{F}, T, \alpha$



$$f(t) = \hat{F} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \alpha\right)$$

Définition:

$$f(t) = \hat{F}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right)$$



Commentaires

- Lorsqu'un circuit est constitué d'**éléments linéaires** et est excité en permanence par une source sinusoïdale, tous les signaux (courants ou potentiels) à chaque point du circuit sont sinusoïdaux avec la **même période**
- Les signaux (courants ou potentiels) en différents points peuvent être différents par l'**amplitude** et la **phase**

Le Déphasage

- On appelle déphasage la différence entre la phase de la tension aux bornes d'un composant et de la phase du courant qui le traverse

$$u(t) = \hat{U} sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right)$$

$$i(t) = \hat{I} sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \beta\right)$$

La tension par rapport au courant!

déphasage $\varphi = \alpha - \beta \begin{cases} < 0 \rightarrow en\ retard \\ > 0 \rightarrow en\ avance \\ = \pm\frac{\pi}{2} \rightarrow en\ quadrature \\ = 2n\pi, \forall n \in N \rightarrow encore\ en\ phase \end{cases}$

Définition: Valeur efficace

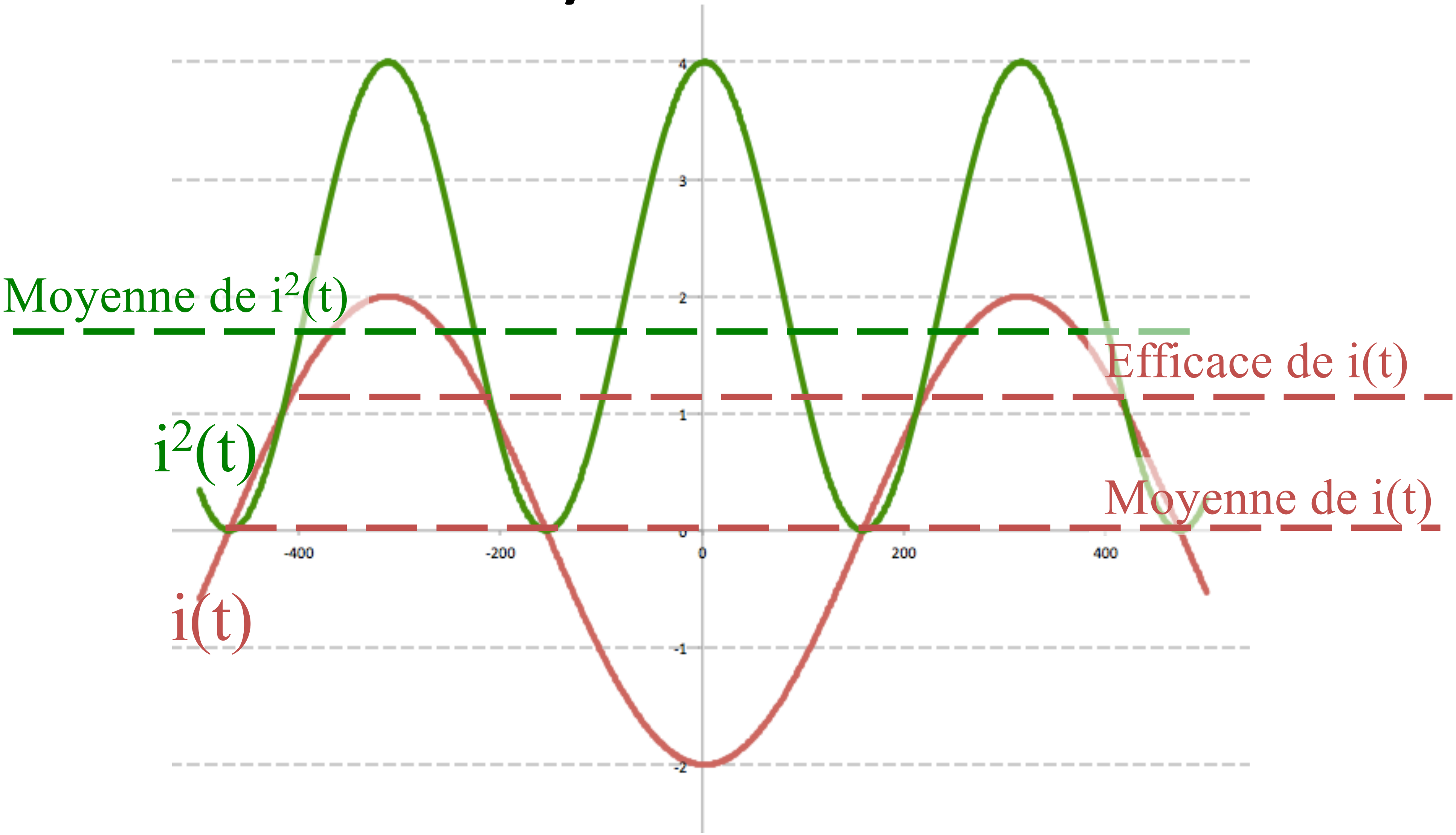
- Valeur efficace d'une grandeur sinusoïdale:

$$F = \sqrt{\frac{1}{T}\int f^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int \hat{F}^2 \sin^2(\omega t)\,dt} = \hat{F}\sqrt{\frac{1}{T}\int \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\omega t)\right]dt}$$

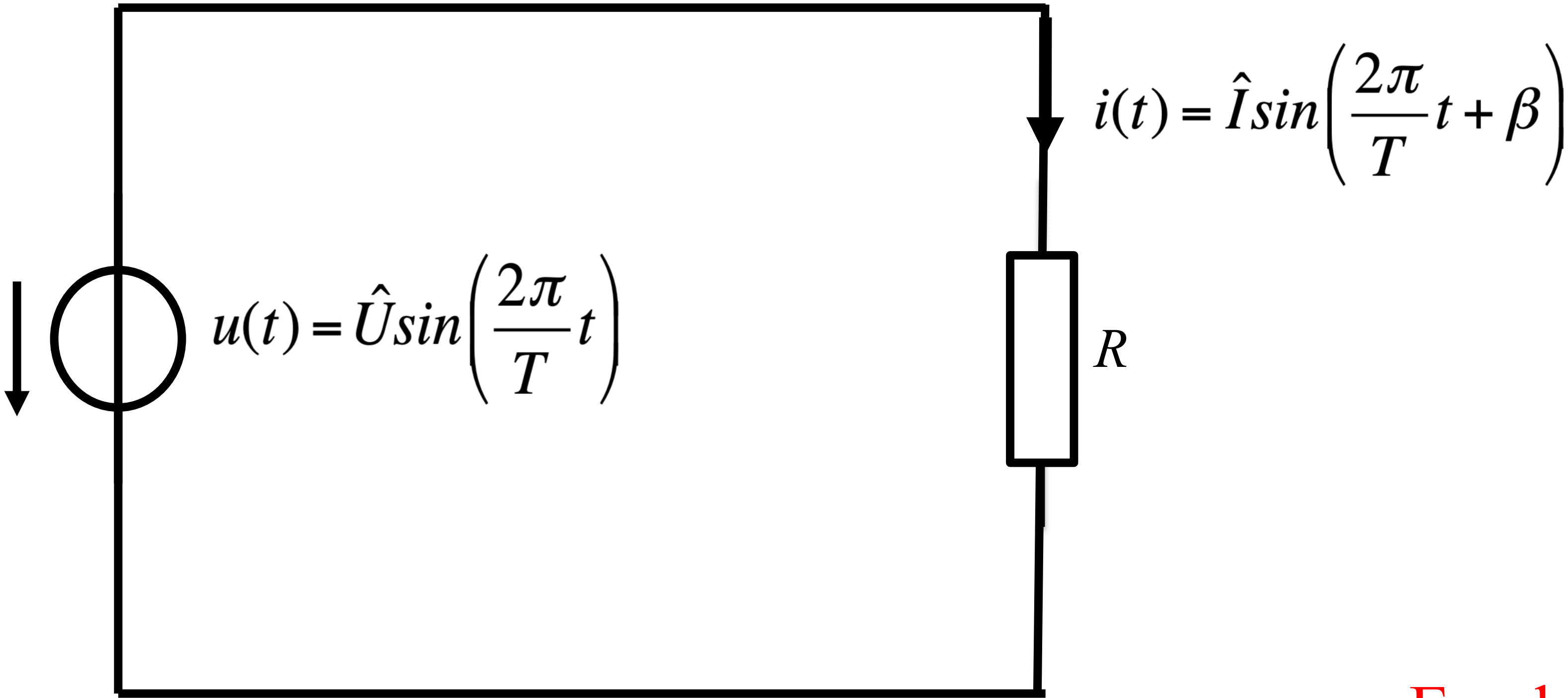
$$F = \hat{F}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\,dt - \frac{1}{T}\cancel{\int_0^T \frac{1}{2}\cos(2\omega t)\,dt}} = \hat{F}\sqrt{\frac{1}{T}\frac{T}{2}} = \frac{\hat{F}}{\sqrt{2}} \qquad \rightarrow F = \frac{\hat{F}}{\sqrt{2}}$$

$$u(t) = \sqrt{2}U sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right) \qquad i(t) = \sqrt{2}I sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \beta\right)$$

Valeurs moyennes et efficaces



Cas de la Résistance

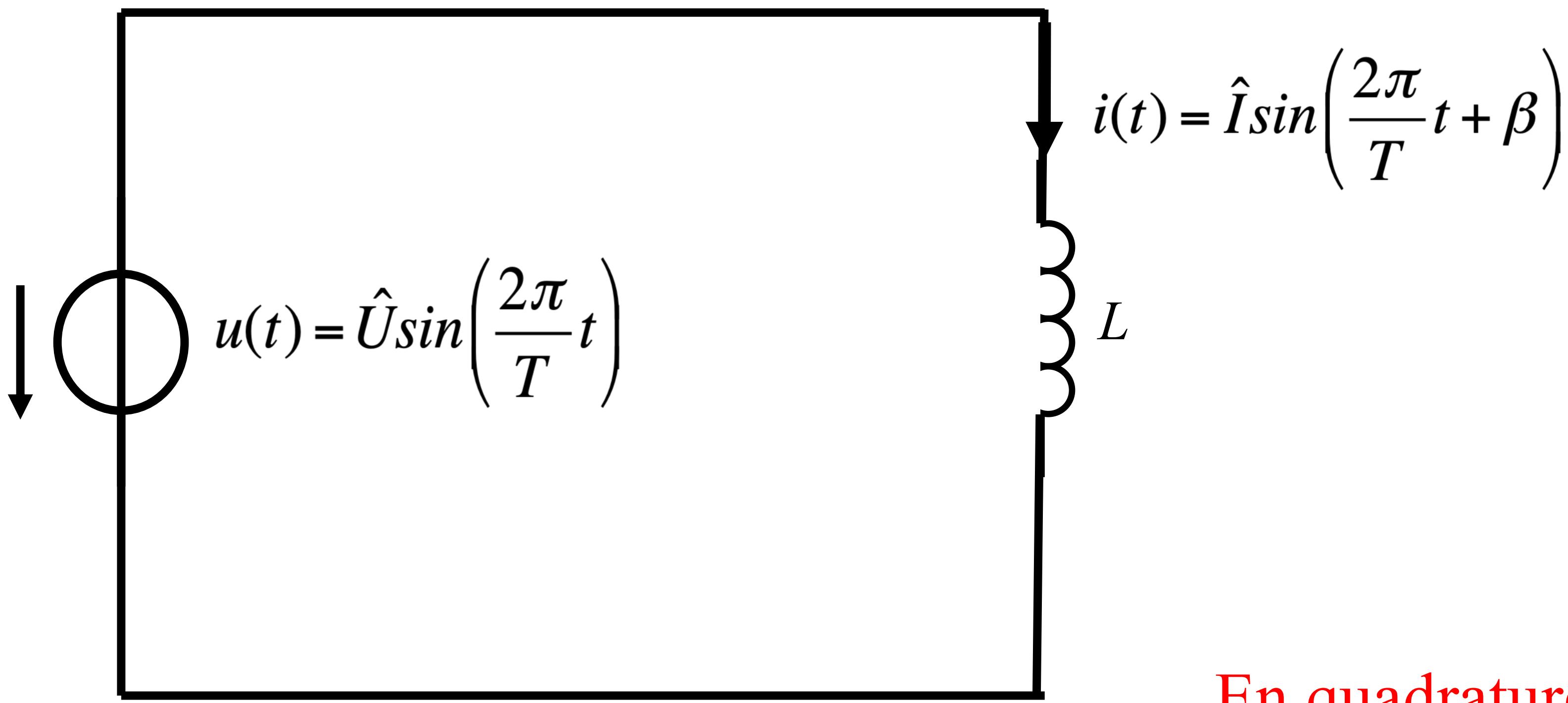


En phase!

$$u(t) = Ri(t) \rightarrow u(t) = \hat{U} sin(\omega t) = R\hat{I} sin(\omega t + \beta) \rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \hat{U} = R\hat{I} \end{cases}$$

Ohm sur les amplitudes!

Cas de l’Inductance

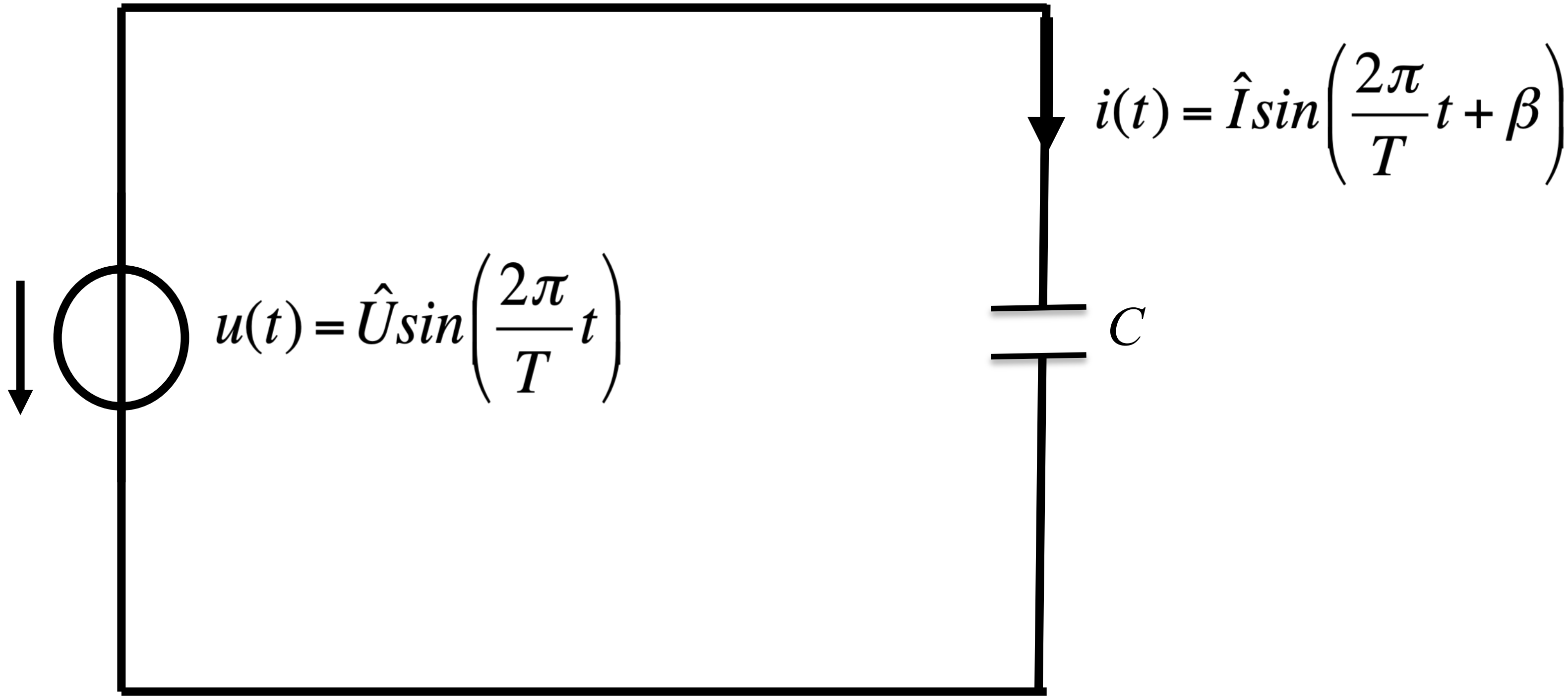


En quadrature!

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \rightarrow u(t) = \hat{U} sin(\omega t) = L\hat{I}\omega sin\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} \beta = -\pi/2 \\ \hat{U} = \omega L \hat{I} \end{cases}$$

Ohm sur les amplitudes!!!

Cas du Condensateur



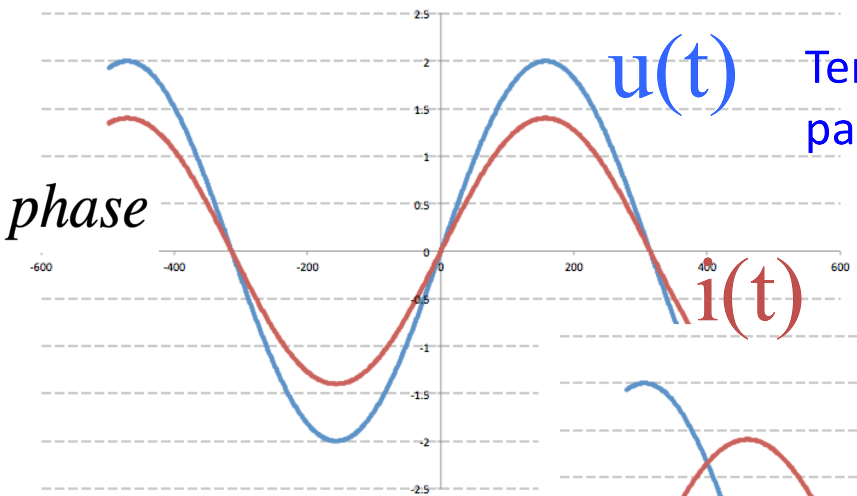
$$C = \frac{dq}{du} \rightarrow \frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \rightarrow \hat{U}\omega\cos(\omega t) = \frac{1}{C}\hat{I}sin(\omega t + \beta)$$

En quadrature!

$$\hat{U}sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\omega C}\hat{I}sin(\omega t + \beta) \rightarrow \begin{cases} \beta = \pi / 2 \\ \hat{U} = \frac{1}{\omega C}\hat{I} \end{cases}$$

Ohm sur les amplitudes!!!

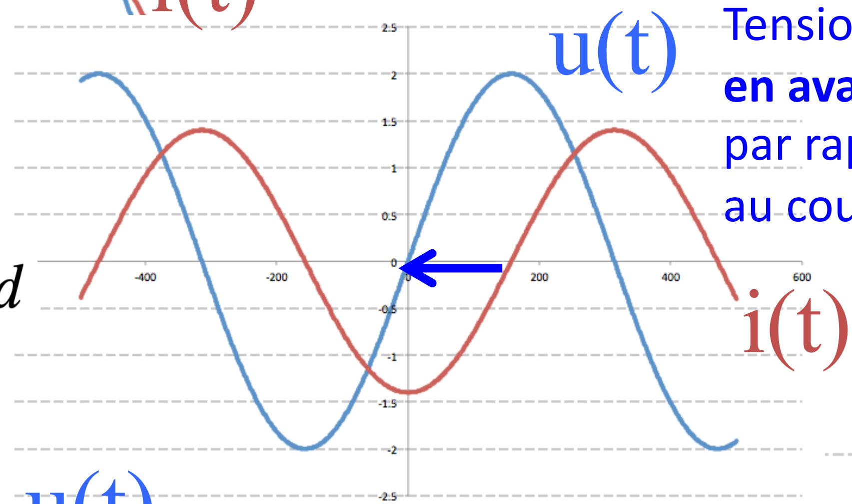
Déphasage



Tension est **en phase** par rapport au courant

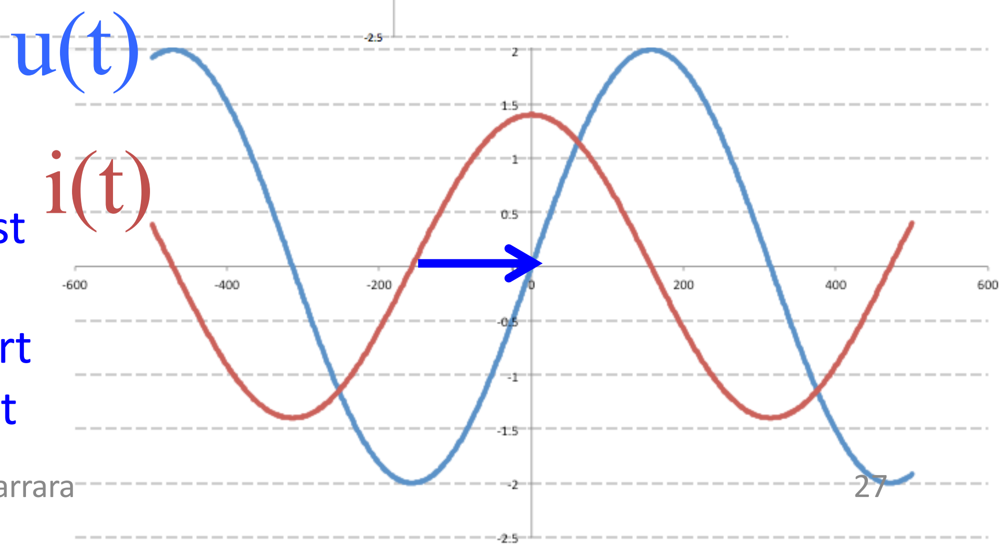
$$R \rightarrow \beta = 0 \rightarrow en\ phase$$

$$L \rightarrow \beta = -\pi/2 \rightarrow courant\ en\ retard$$



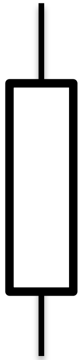
Tension est **en avance** par rapport au courant

$$C \rightarrow \beta = \pi/2 \rightarrow courant\ en\ avance$$



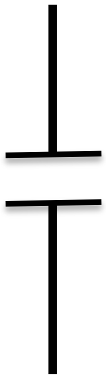
Tension est **en retard** par rapport au courant

Une sorte de Lois d'Ohm?



$$Ri \rightarrow \hat{U} = R\hat{I}$$

$$L \rightarrow \hat{U} = \omega L\hat{I}$$



$$C \rightarrow \hat{U} = \frac{1}{\omega C}\hat{I}$$

Oui pour l'amplitude
(ou la valeure efficace),
mais pas pour la phase.

Définition:

- Les Phaseurs complexes dépendant du temps:

$$\underline{x}(t) = \hat{X}e^{j(\omega t+\varphi)} = \hat{X}e^{j(\omega t)}e^{j\varphi}$$ Phaseur dépendant du temps

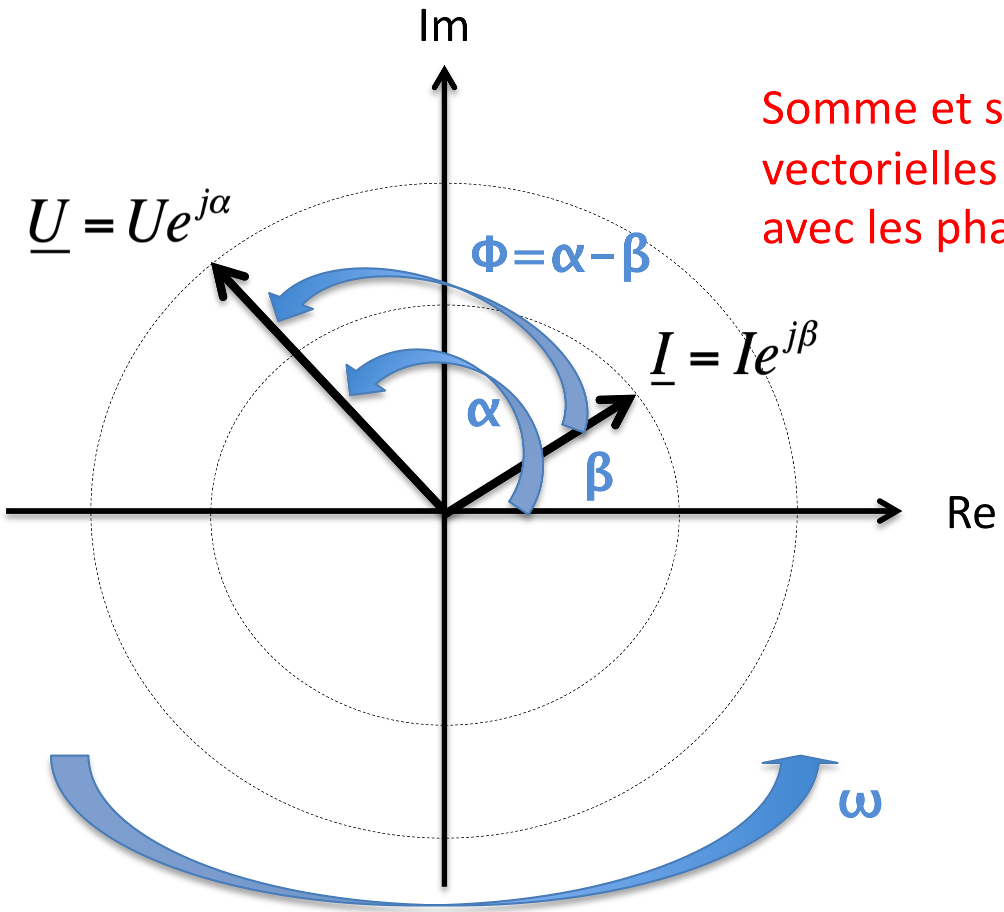
- Les Phaseurs de crête complexes et les Phaseurs efficaces complexes sont indépendants du temps:

$$\underline{\hat{X}} = \frac{\underline{x}}{e^{j(\omega t)}} = \hat{X}e^{j\varphi}$$ Phaseur de crête complexe

$$\underline{X} = \frac{\underline{x}}{\sqrt{2}e^{j(\omega t)}} = \frac{\hat{X}}{\sqrt{2}}e^{j\varphi} = Xe^{j\varphi}$$ Phaseur efficace complexe

Définition:

- Vecteurs de Fresnel



Somme et soustraction vectorielles sont disponibles avec les phaseurs!

Calcul complexe associé

$$R,L\ \ en\,serie \rightarrow calcul\ \ basé\ sur\ "\sin(\omega t+\beta)+\cos(\omega t+\beta)"$$

Forme d'Euler

$$\underline{x} = \hat{X}e^{j(\omega t+\beta)} = \hat{X}\left(\cos(\omega t+\beta) + j\sin(\omega t+\beta)\right)$$

$$j \rightarrow j^2 = -1 \rightarrow j = \sqrt{-1}$$

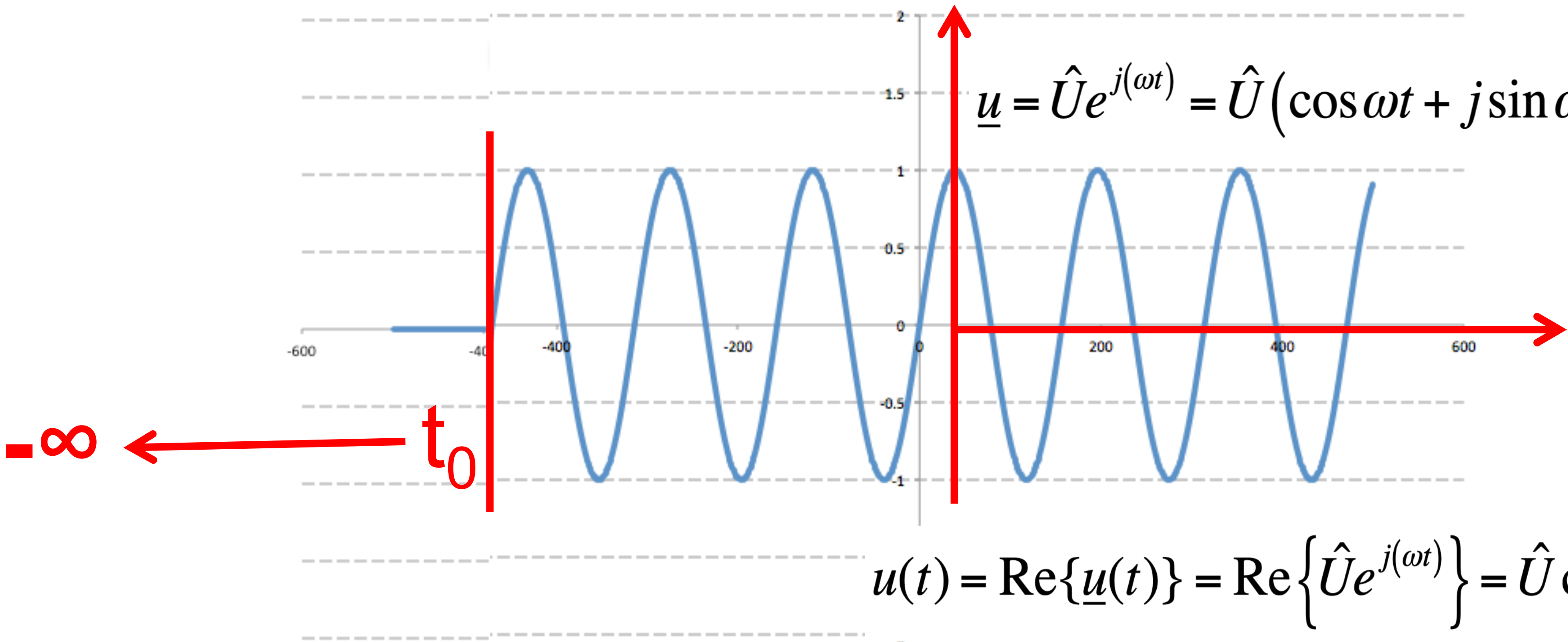
Nombre imaginaire

Un nombre complexe = nombre réelle + nombre imaginaire

$$\begin{cases} \underline{x} = \hat{X}e^{j\vartheta} = \hat{X}\left(\cos\vartheta + j\sin\vartheta\right) \\ \dfrac{d\underline{x}}{d\vartheta} = j\underline{x} \\ \displaystyle\int \underline{x}\,d\vartheta = \frac{\underline{x}}{j} = -j\underline{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{u} = \hat{U}e^{j(\omega t)} = \hat{U}\left(\cos\omega t + j\sin\omega t\right) \\ \dfrac{d\underline{u}(t)}{dt} = j\omega\underline{u}(t) \\ \displaystyle\int \underline{u}(t)\,dt = \frac{\underline{u}(t)}{j\omega} = -j\frac{\underline{u}(t)}{\omega} \end{cases}$$

Définition:

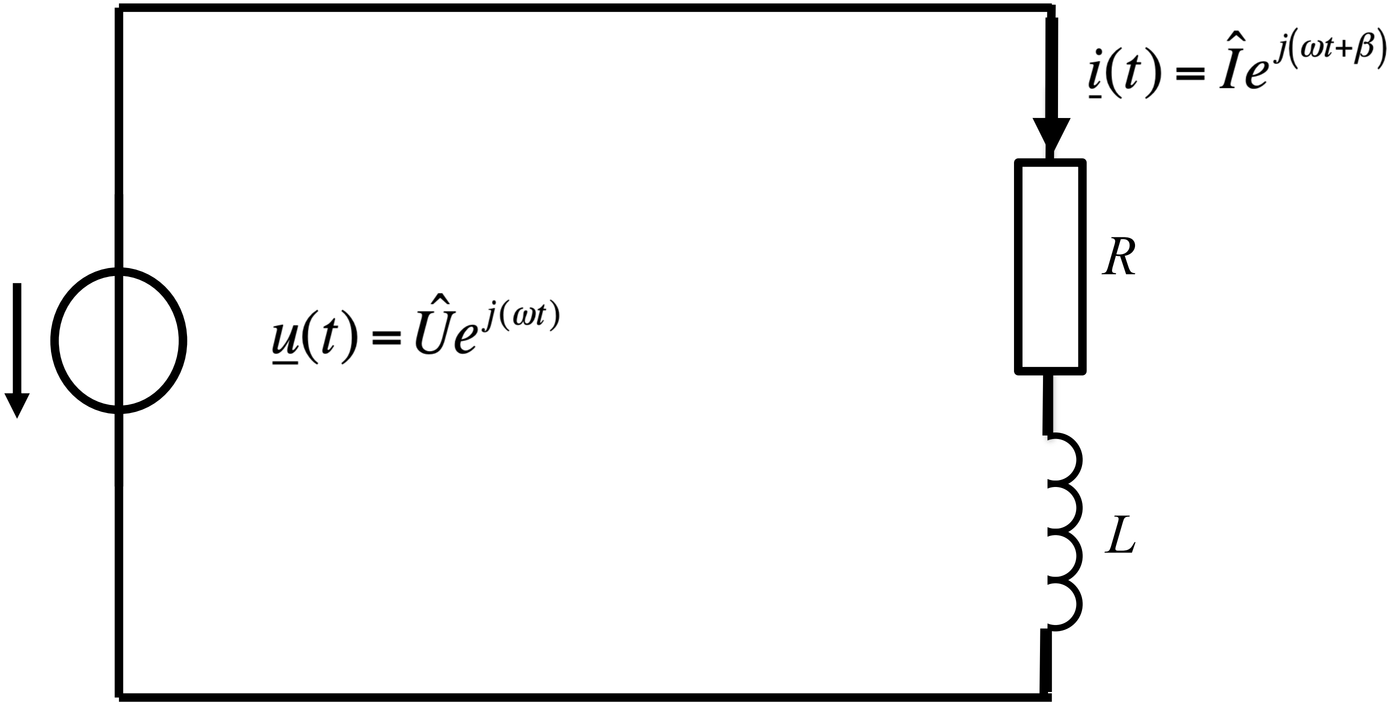
- La fonction homologue complexe associée retourne la fonction sinusoïdale avec sa partie réelle



$$\underline{u} = \hat{U}e^{j(\omega t)} = \hat{U}\left(\cos\omega t + j\sin\omega t\right)$$

$$u(t) = \mathrm{Re}\{\underline{u}(t)\} = \mathrm{Re}\left\{\hat{U}e^{j(\omega t)}\right\} = \hat{U}\cos\omega t$$

Cas de Résistance et Inductance en série



$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} \rightarrow \underline{u}(t) = R\underline{i}(t) + j\omega L\underline{i}(t) = (R + j\omega L)\underline{i}(t)$$

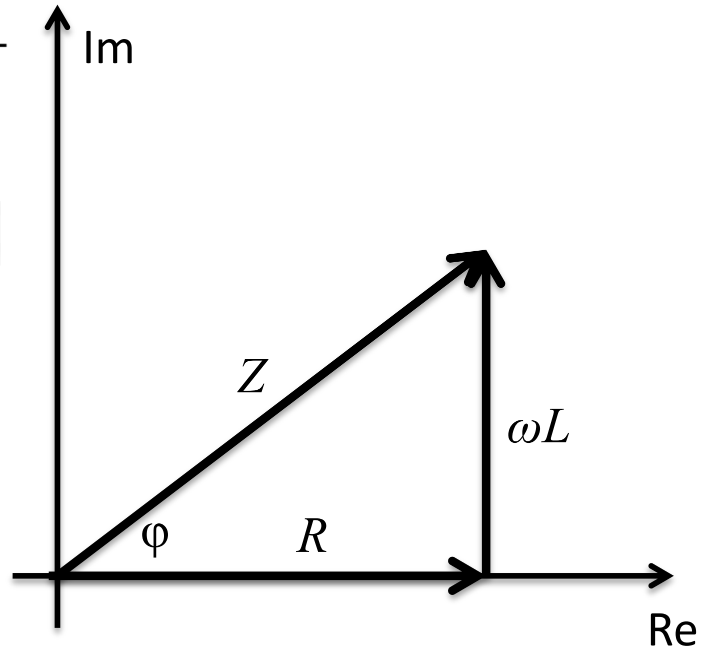
même fonction

Le concept de l'Impédance

- C'est "une forme de Résistance"

$$\underline{u}(t) = R\underline{i}(t) + j\omega L\underline{i}(t) = \left(R + j\omega L\right)\underline{i}(t) = \underline{Z}\,\underline{i}(t)$$

$$\underline{Z} = R + j\omega L = Ze^{j\varphi} \rightarrow \begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \\ \varphi = arctg\left(\dfrac{\omega L}{R}\right) \end{cases}$$



Ohm sur les amplitudes

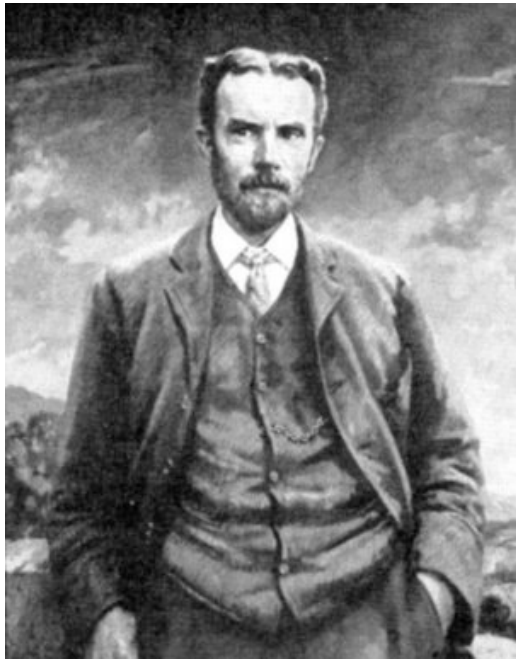
$$\underline{u}(t) = \underline{Z}\,\underline{i}(t) \rightarrow \begin{cases} \hat{U} = Z\hat{I} \\ \beta = \varphi \end{cases}$$

L'impédance est responsable de la phase

L’introduction des Nombres Complexes

Le terme « impédance » a été inventé par **Oliver Heaviside** en Juillet 1886, tandis que **Arthur Edwin Kennelly** était le premier à représenter l'impédance avec des nombres complexes en 1893 et il a étudié l'utilisation des nombres complexes appliqués à la loi d'Ohm en régime sinusoïdal dans la théorie des circuits

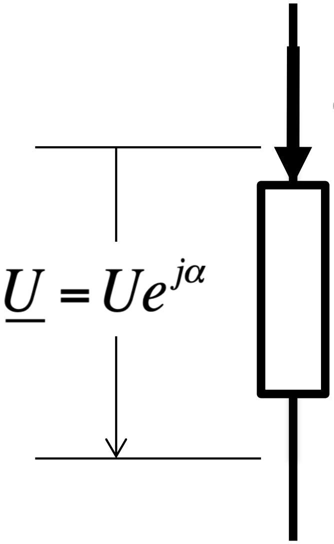
Arthur E. Kennelly (1861-1939)



Oliver Heaviside (1850-1925)

Définition:

- ***L'impédance*** complexe $\underline{Z}$ d'un dipôle associé à une fréquence donnée en régime permanent sinusoïdal est le quotient de la tension par le courant complexe



$$\underline{I} = Ie^{j\beta}$$

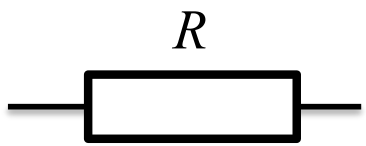
$$\underline{U} = Ue^{j\alpha}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\alpha}}{Ie^{j\beta}} = \frac{U}{I}e^{j(\alpha-\beta)}$$

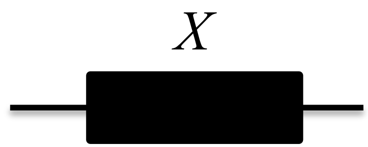
L'impédance gère directement le déphasage

Définition:

- ***La Résistance*** d'une impédance est la partie réelle d'impédance complexe $\underline{\boldsymbol{Z}}$
- ***La Réactance*** d'une impédance est la partie imaginaire d'impédance complexe $\underline{\boldsymbol{Z}}$



$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = Z\cos\varphi + jZsin\varphi \rightarrow \begin{cases} R = Z\cos\varphi = \mathrm{Re}\{\underline{Z}\} & \text{Résistance} \\ X = Z\sin\varphi = \mathrm{Im}\{\underline{Z}\} & \text{Réactance} \end{cases}$$



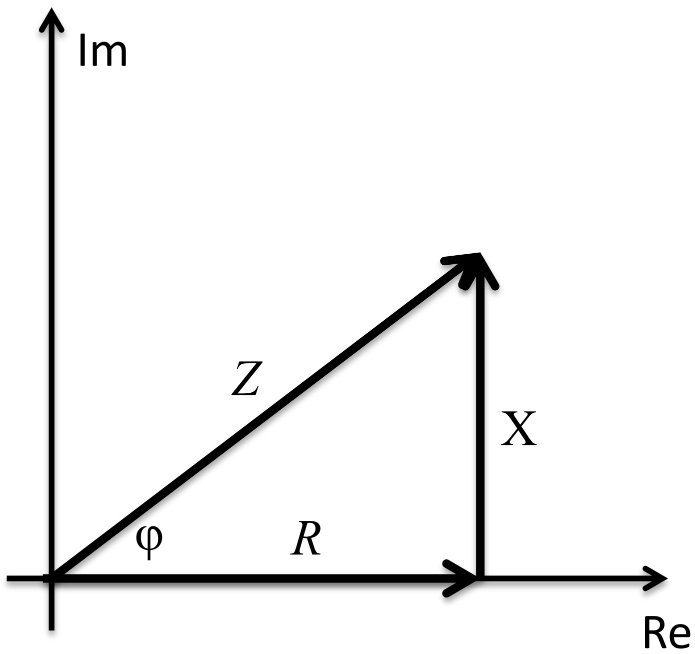
Commentaires:

- Résistance et Réactance nous donnent les valeurs du module et de la phase de l'impédance

$$\underline{Z} = R + jX \rightarrow \begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \varphi = \arctan\left(\dfrac{X}{R}\right) \end{cases}$$

Un déphasage non-nul signifie que la réactance est non-nulle

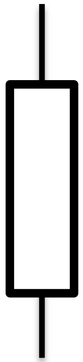
Le plan complexe



Une véritable Lois d'Ohm: $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$!

Ohm sur les amplitudes!

$\underline{Z} = R$



$$\underline{U} = R\underline{I} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\{\underline{Z}\} = R = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = \dfrac{U}{I} \\ \mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

En phase!

Une véritable Lois d'Ohm: $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$!

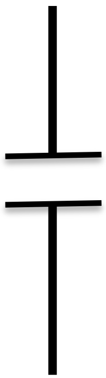
$\underline{Z} = j\omega L$

$$\underline{U} = L\frac{d\underline{I}}{dt} \rightarrow \underline{U} = j\omega L \underline{I} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\{\underline{Z}\} = 0 \\ \mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = \dfrac{U}{I} = \omega L \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ohm sur les amplitudes!!!

En quadrature!

$\underline{Z} = 1/j\omega C$

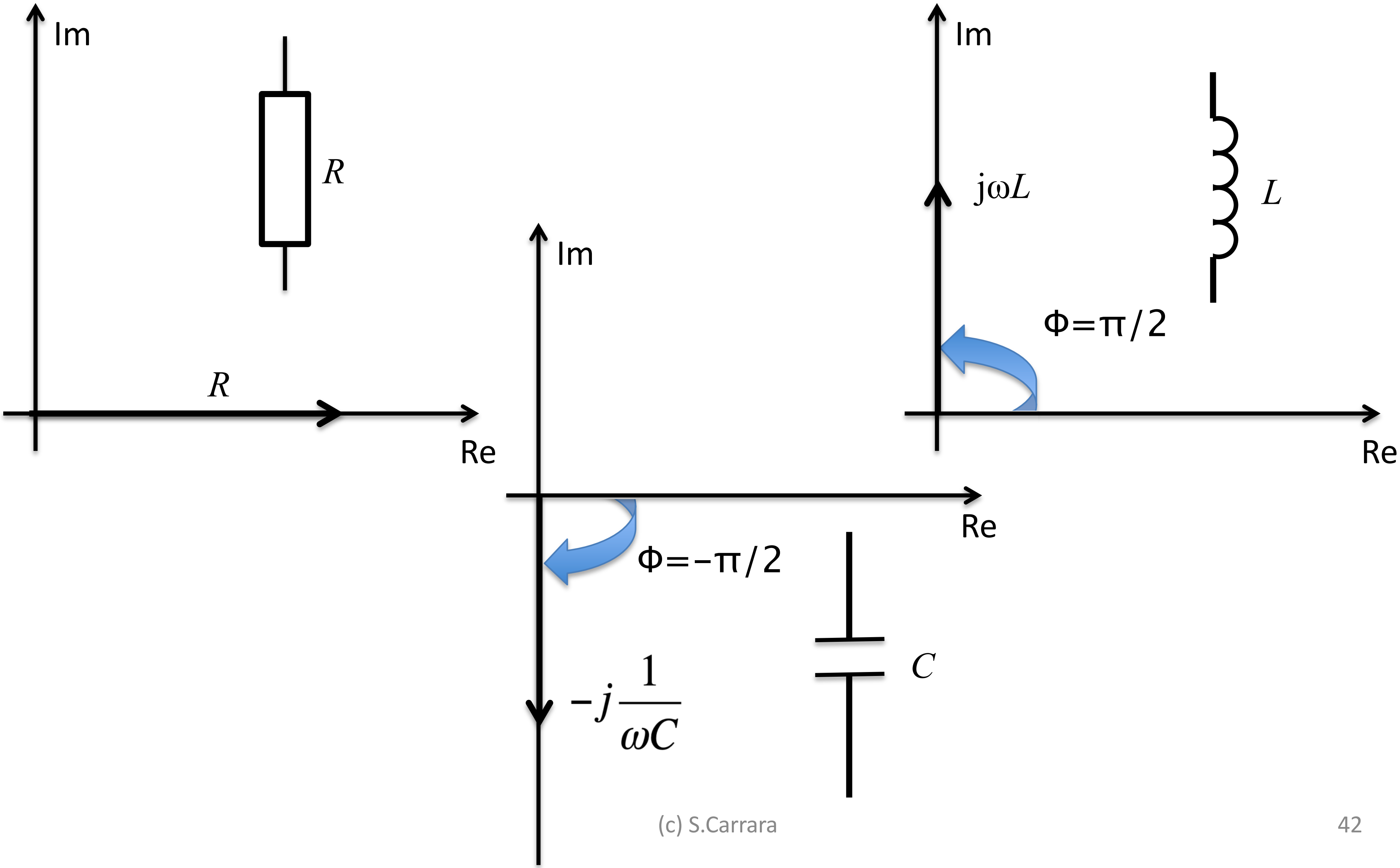


$$\underline{I} = C\frac{d\underline{U}}{dt} = j\omega C\underline{U} \rightarrow \underline{U} = \frac{1}{j\omega C}\underline{I} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\{\underline{Z}\} = 0 \\ \mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = \dfrac{U}{I} = -\dfrac{1}{\omega C} \\ \varphi = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

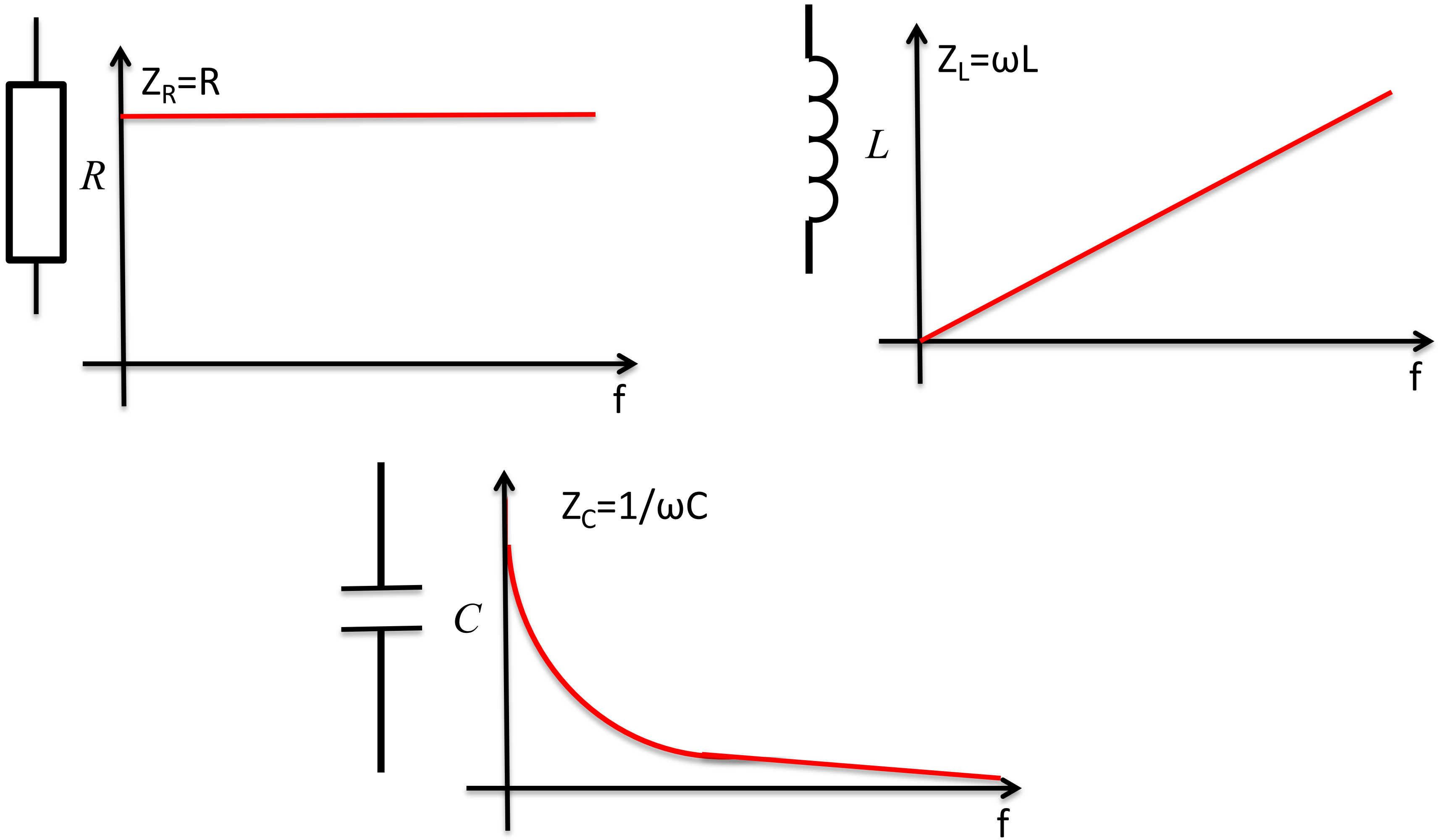
Ohm sur les amplitudes!!!

En quadrature!

Sur le plan complexe

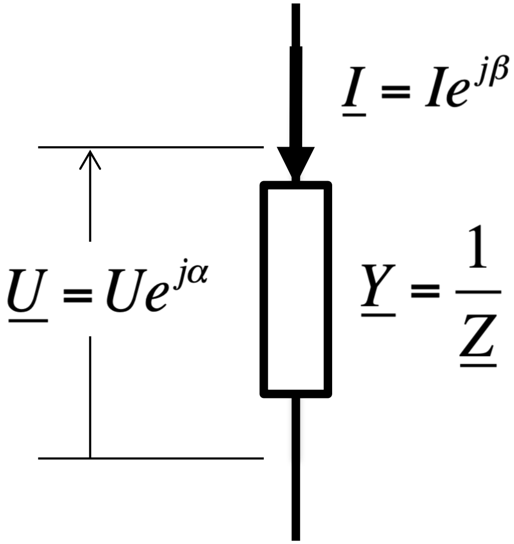


Module d'impédance par rapport à la fréquence



Définition:

- ***L'admittance*** complexe $\underline{\boldsymbol{Y}}$ d'un dipôle associé à une fréquence donnée en régime permanent sinusoïdal est l'inverse de l'impédance



$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{Ie^{j\beta}}{Ue^{j\alpha}} = \frac{I}{U}e^{-j(\alpha-\beta)}$$

Définition:

- ***La Conductance*** d'une impédance est la partie réelle de l'**Admittance** complexe ***$\underline{Y}$***
- ***La Susceptance*** d'une impédance est la partie imaginaire de l'**Admittance** complexe ***$\underline{Y}$***

$$\underline{Y} = Ye^{-j\varphi} = \frac{I}{U}e^{-j\varphi} = \frac{I}{U}\cos(-\varphi) + j\frac{I}{U}sin(-\varphi) \rightarrow \begin{cases} G = Y\cos\varphi = \mathrm{Re}\{\underline{Y}\} \\ B = -Y\sin\varphi = \mathrm{Im}\{\underline{Y}\} \end{cases}$$

Commentaire: calcule complexe sous forme algébrique

$$\underline{Z}_1 \pm \underline{Z}_2 = R_1 + jX_1 \pm R_2 + jX_2 = \left(R_1 \pm R_2\right) + j\left(X_1 \pm X_2\right)$$

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = \left(R_1 + jX_1\right) \cdot \left(R_2 + jX_2\right) = R_1R_2 + j\left(R_1X_2 + R_2X_1\right) + j^2 X_1X_2$$

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = R_1R_2 - X_1X_2 + j\left(R_1X_2 + R_2X_1\right)$$

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{R_1 + jX_1}{R_2 + jX_2} = \frac{R_1 + jX_1}{R_2 + jX_2} \cdot \frac{R_2 - jX_2}{R_2 - jX_2} = \frac{R_1R_2 + X_1X_2 + j\left(R_2X_1 - R_1X_2\right)}{R_2^2 + X_2^2}$$

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{R_1R_2 + X_1X_2}{R_2^2 + X_2^2} + j\frac{R_2X_1 - R_1X_2}{R_2^2 + X_2^2}$$

Commentaire: calcule complexe sous forme exponentielle

$$\underline{Z}_1 \pm \underline{Z}_2 = Z_1 e^{j\varphi_1} \pm Z_2 e^{j\varphi_2} = Z_1 \cos\varphi_1 \pm Z_2 \cos\varphi_2 + j\left(Z_1 \sin\varphi_1 \pm Z_2 \sin\varphi_2\right)$$

$$\underline{Z}_1 \pm \underline{Z}_2 \neq \left(Z_1 \pm Z_2\right) e^{j(\varphi_1 \pm \varphi_2)}$$

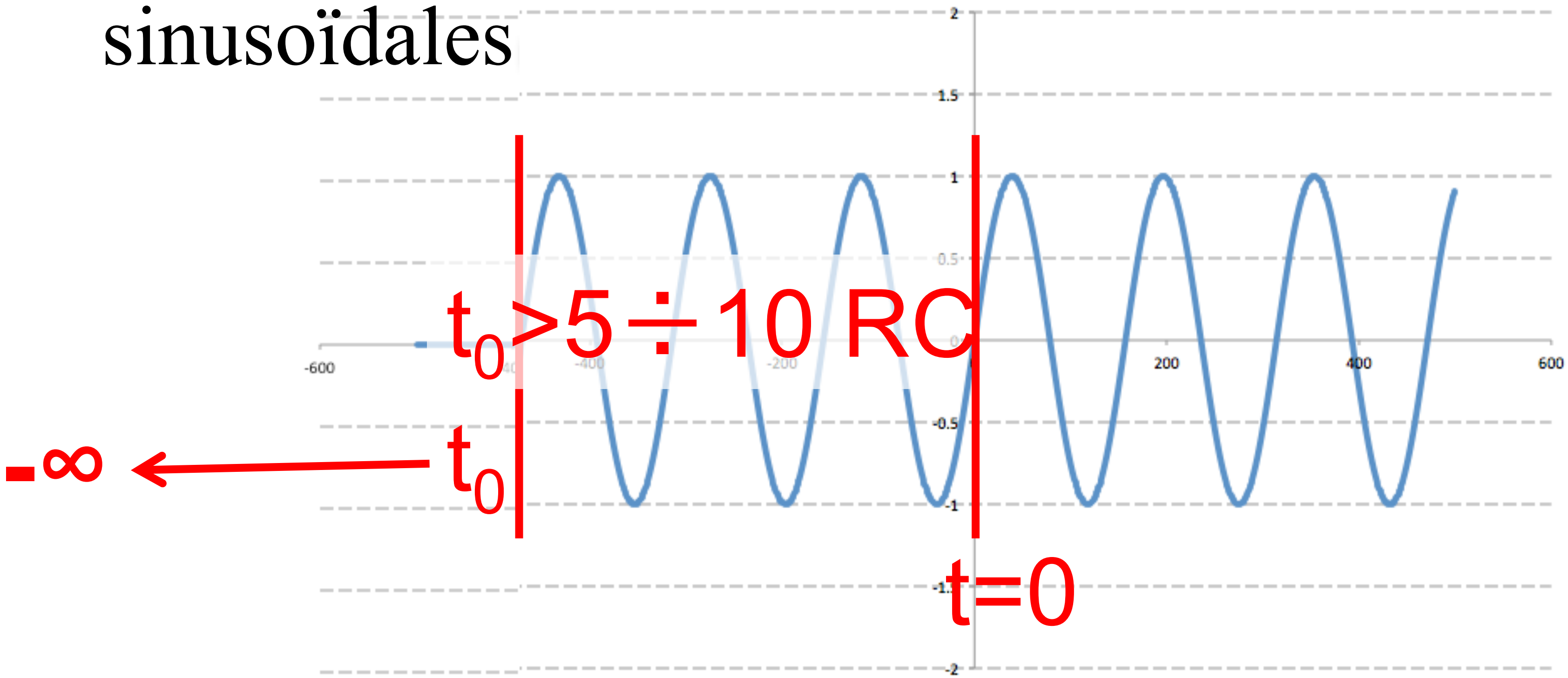
$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = Z_1 e^{j\varphi_1} \cdot Z_2 e^{j\varphi_2} = Z_1 Z_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{Z_1 e^{j\varphi_1}}{Z_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{Z_1}{Z_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{Z_1}{Z_2}\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + j\frac{Z_1}{Z_2}\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$$

Commentaire

- Cette modélisation traite exclusivement les ***régimes permanents sinusoïdaux*** lorsque les excitations extérieures sont des fonctions sinusoïdales



Commentaires

- Cette méthode ne peut pas être appliquée dans le cas d’un régime transitoire.
- Cette méthode ne peut pas être appliquée dans le cas d’enclenchement, déclenchement, changement des valeurs des sources, changement des valeurs des composants, etc…

En Résumé .

- Aujourd'hui
  - Régime permanent sinusoïdal
  - Grandeurs sinusoïdales
  - Calcul complexe associé
  - Impédances
  - Admittances

- Pour la semaine prochaine
  - loi d'Ohm
  - loi de Kirchhoff
  - Diviseur de tension et de courant
  - Superposition
  - Sections 7.2-7.4

A lire